I. megoldás. Vegyük észre, hogy az együtthatók összege 0, vagyis az $x_1 = 1$ szám gyöke az egyenletnek. Továbbá x páros és páratlan kitevős hatványai együtthatóinak összege külön–külön is 0, eszerint $x_2 = -1$ is gyök. A talált x_1 és x_2 nem függ k-tól. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A további két gyök vizsgálata céljára osszuk az egyenlet bal oldalát a talált gyökökhöz tartozó gyöktényezők $(x-1)(x+1) = x^2-1$ szorzatával:

$$\frac{x^4-(k+3)x^3-(k-11])x^2+(k+3)x+(k-12)}{x^2-1} = x^2-(k+3)x-(k-12).$$

Eszerint a további gyökök az

$$x^2-(k+3)x-(k-12) = 0$$

egyenlet gyökei. Ezek akkor valósak, ha a diszkrimináns nem negatív:

$$\begin{aligned} D &= (k+3)^2+4(k-12) = k^2+10k-39 = (k+5)^2-64 = \\ &= (k+5-8)(k+5+8) = (k-3)(k+13) \geq 0. \end{aligned}$$

Eszerint k nem eshet -13 és $+3$ közé, a keresett feltétel: $k \leq -13$ és $k \geq 3$.

Bácsy Zsolt (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. *(A feladat* 1. *részére.)* A k-t tartalmazó tagokat különválasztva az egyenlet:

$$x^4-3x^3+11x^2+3x-12-k(x^3+x^2-x-1) = 0.$$

A k-tól független gyöknek egyrészt 0-vá kell tennie a k-val szorzott polinomot, másrészt a k-t nem tartalmazó tagokból álló polinomot is. Mivel

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x-1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2,$$

azért a k-t tartalmazó rész csak $x=1$ és $x=-1$ mellett tűnik el. Ezekkel a k-t nem tartalmazó rész is eltűnik, tehát ezek az egyenlet k-tól független gyökei.

Kerényi Ilona (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. III. o. t.)

III. megoldás. *(A feladat* 1. *részére.)* A k-tól független gyök csak azok közül a gyökök közül kerülhet ki, amelyeket a k egy tetszés szerint választott értékével adódó egyenletből kapunk. Célszerű $k=-3$-at választani, mert így x^3 és x együtthatója 0, és az egyenlet másodfokúra redukálható: $x^4+14x^2-15=0$. Innen $(x^2)_1 = 1$, $(x^2)_2 = -15$, az előbbiből $x_{1,2} = \pm 1$, az utóbbiból adódó gyökpár nem valós.

x_1 és x_2 a k értékétől függetlenül kielégíti az egyenletet.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat eredetileg hibásan közölt alakjában a k-t tartalmazó részt 0-vá tevő $x_{1,2} = \pm 1$ számok mellett a k-t nem tartalmazó rész nem tűnt el. Az így nyilvánvalóan szükséges helyesbítés úgyis elképzelhető volt, ha az utolsó tagban $k-12$ helyett $k-2$-t írunk. Ekkora további két gyök az $x^2-(k+3)x-(k-2) = 0$ egyenletből adódik és ezek valósak, ha $k \leq -5-\sqrt{24}$, vagy ha $k \geq -5+\sqrt{24}$.

Méder László Ferenc (Kolozsvár [Cluj], „Ady–Sincai” középiskola X. o.t.)