I. megoldás. Jelöljük a sorozat tagjait rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel, vagyis $a_k = ak^2+bk+c$. Az előírt összehasonlítások céljára képezzük egy tetszés szerinti szomszédos tagpárnak, a_{k+1} és a_k-nak d_k különbségét, ahol $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$d_k = a_{k+1} - a_k = \left[a(k+1)^2 + b(k+1) + c\right] - (ak^2 + bk + c) = a + b + 2ak.$$

Vagy, arra tekintettel, hogy alább ismételten fellép a $3a + b$ kifejezés:

$$d_k = (3a + b) + 2a(k - 1). \tag{1}$$

Most már az α) esetben, mivel $a > 0$ és $k - 1 \geqq 0$, minden szóba jövő k-ra $d_k > 0$, vagyis $a_{k+1} > a_k$, eszerint a_2-től kezdve valóban minden tag nagyobb az előtte állónál (a_1 mindvégig csak azért kivétel, mert nincs mihez hasonlítani).

A β) esetben $d_k = 2a(k - 1)$, sohasem negatív, de $k = 1$ esetén $d_1 = 0$. Ezért $a_2 = a_1$, és minden $k > 1$ értékre $a_{k+1} > a_k$. Ez megfelel a feladat állításának.

A γ) eset feltételét két egyenlőtlenségre bontjuk:

$$b < -3a, \quad \text{vagyis} \quad 3a + b < 0, \quad \text{és}$$
$$-(2n-1)a < b, \quad \text{vagyis} \quad (2n-1)a + b > 0.$$

Így (1)-ből $k = 1$-re $d_1 = 3a+b < 0$, tehát $a_1 > a_2$. Viszont $k = n-1$-re $d_{n-1} = 2a(n-2)+3a+b = (2n-1)a+b > 0$, tehát $a_n > a_{n-1}$. Ezek szerint az a_2 és a_{n-1} tagok kisebbikére teljesül az idevágó állítás, ugyanis ez a tag a_1 és a_n – a legkisebb és a legnagyobb sorszámú tagok – mindegyikénél kisebb. $n = 3$, vagyis $n - 1 = 2$, $a_{n-1} \equiv a_2$ esetén a_2 megfelel, más tagról nem is lehet szó.

A hátralevő esetek céljára d_k-t úgy alakítjuk, hogy külön tagként tartalmazza a feltételek bal oldalán álló kifejezést:

$$d_k = \left[(2n-1)a + b\right] + 2a(k + 1 - n). \tag{2}$$

Így a δ) esetben $d_k = 2a(k + 1 - n)$, és ez nem lehet pozitív, mert a zárójel negatív, vagy 0. Valóban, $k = n - 1$ mellett $d_{n-1} = a_n - a_{n-1} = 0$, vagyis $a_n = a_{n-1}$, és $k < n - 1$ mellett $d_k < 0$, tehát $a_{k+1} < a_k$, vagyis minden tag vagy kisebb az előtte állónál, vagy egyenlő avval, valóban nem nagyobb.

Végül az ε) esetben (2) első szögletes zárójele negatív, a második nem pozitív, így összegük negatív, minden k-ra $d_k < 0$, $a_{k+1} < a_k$, az állításnak megfelelően.

Somogyi Károly (Bonyhád, Petőfi S. g. III. o. t.)

Megjegyzés. (1) szerint a d_k különbségek $n-1$ tagú, $2a$ különbségű számtani sorozatot alkotnak, a kezdő tag $3a+b$. Mivel $2a$ pozitív, azért ez a sorozat minden esetben növekedő. Az α), β), …, ε) feltételek burkoltan ezen sorozat tagjainak előjelét adták meg, pontosabban az α) és β) esetben az első tag, a δ) és ε) esetben az utolsó tag, a γ) esetben pedig az első és az utolsó tag előjelét (a β) és δ) esetben azt, hogy az említett tag értéke 0). Ebből és a sorozat növekedő voltából állapíthattuk meg mindegyik esetben a d-sorozatban előforduló előjeleket, majd erre támaszkodva mondhattuk ki, hogy az eredeti sorozat az öt esetben rendre mindvégig *növekvő*, – az első két tag kivételével növekvő, de a kivett két tagra sem csökkenő, tehát *nem csökkenő*, – *csökkenő, majd növekvő*, – az utolsó két tag kivételével csökkenő, de ott sem növekvő, tehát *nem növekvő*, – ill. mindvégig *csökkenő*.

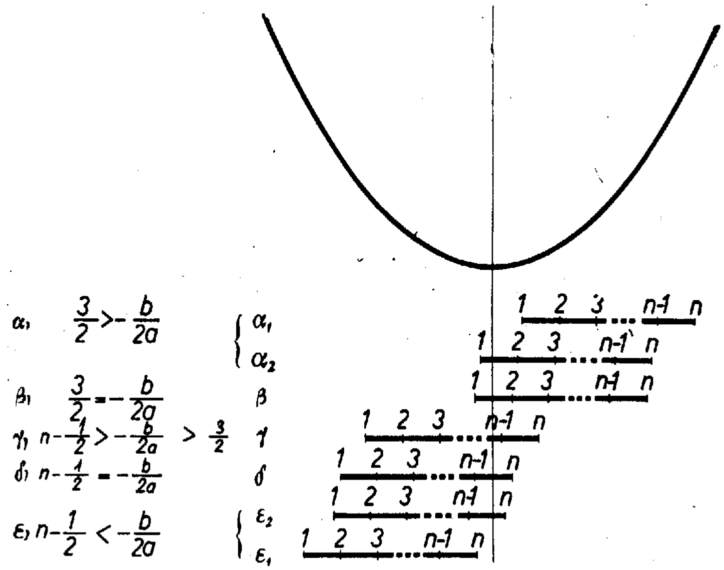
Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

II. megoldás. A kérdéses számsorozat tagjait az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek az $x = 1, 2, \ldots, n$ egész helyeken felvett értékei adják meg. E függvény menetét jól ismerjük, ezért a sorozat szomszédos tagjai közti nagyságviszonyokat kiolvashatjuk a függvény grafikonjából. A függvényt

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \tag{3}$$

alakban írva látjuk, hogy legkisebb értékét az $x = -b/2a$ helyen veszi fel, ezen az abszcisszán van a grafikont adó parabola csúcsa, és az $x = -b/2a$ egyenes a parabola szimmetriatengelye. Mivel $a > 0$, a parabola ágai felfelé emelkednek, vagyis az X-tengelyen balról jobbra haladva a grafikon $x = -b/2a$-ig süllyed, onnan tovább emelkedik. Az $x + b/2a$ összeg abszolút értéke az (x, y) pontnak a szimmetriatengelytől való távolságát adja. (3)-ból látjuk, hogy $|x + b/2a|$ növekedésével y is növekszik.

A feltételek alakításával megállapíthatjuk $a - b/2a$ hányadosnak a $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ sorozat tagjaihoz való nagyságviszonyát, ebből pedig azt, hogy a sorozatunk tagjait ábrázoló $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, …, $(n-1, a_{n-1})$, (n, a_n) pontok a parabolán a csúcshoz képest hogyan helyezkednek el. Átrendezéssel és osztással a feltételek az ábra bal oldalán feltüntetett alakba írhatók.



Eszerint a β) és δ) esetben a parabola tengelye az X-tengely 1 és 2, ill. $n-1$ és n abszcisszájú pontjai közti szakasz felező merőlegese, tehát a parabola szimmetriája folytán a megfelelő ordinátákra áll: $a_1 = a_2$, ill. $a_{n-1} = a_n$ így a β) esetben az $(1,\, a_1)$ pont kivételével minden pontunk a parabola emelkedő ágán van, az ordináták sorozata növekvő; a δ) esetben pedig az $(n,\, a_n)$ pont kivételével minden pontunk a süllyedő ágon van, a sorozat csökkenő.

Az α) esetben a parabola tengelye balra, az ε) esetben pedig jobbra van a β), ill. δ) esetben említett felező merőlegestől. Ebből nem lehet megállapítani, hogy az $(1,\, a_1)$, ill. az $(n,\, a_n)$ pont a grafikon melyik ágán van. Azonban az $(1,\, a_1)$ pont mindenesetre közelebb van a szimmetriatengelyhez, mint a $(2,\, a_2)$ pont, így ordinátája kisebb: $a_1 < a_2$, tehát a számsorozat mindvégig növekedő. Hasonlóan az ε) esetben az $(n,\, a_n)$ pont közelebb van a tengelyhez, mint $(n-1,\, a_{n-1})$, és ezért $a_n < a_{n_1}$.

Végül a γ) esetben a parabola tengelye jobbra van az $x = 3/2$ egyenestől, tehát az $(1,\, a_1)$ pont a süllyedő ágon van, éspedig a tengelytől távolabb, mint $(2,\, a_2)$, és ezért $a_1 > a_2$, másrészt a tengely balra van az $x = n - 1/2$ egyenestől, és ezért az $(n,\, a_n)$ pont az emelkedő ágon van, a tengelytől távolabb, mint $(n-1,\, a_{n-1})$ és ezért $a_n > a_{n-1}$. Így a $(2,\, a_2)$ és $(n-1,\, a_{n-1})$ pontok közül a kisebb ordinátájú mind $(1,\, a_1)$-nél, mind $(n,\, a_n)$-nél alacsonyabban van.

Rátkai János (Kisújszállás, Móricz Zs. g. IV. o. t.)