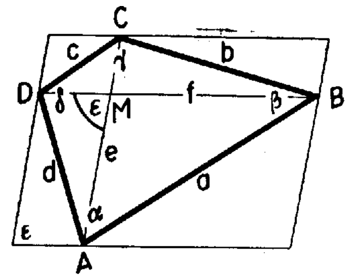
I. megoldás. Legyenek az $ABCD$ négyszögnek az A, B, C, D csúcsnál fekvő, szögei α, β, γ, δ, oldalai $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, átlói $AC=e$, $BD=f$, a köztük levő szög ε, végül a terület t (1. ábra).



1. ábra

– A BDA és BDC, valamint ACB és ACD háromszögpárokból az átlók négyzetére

$$f^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\gamma, \tag{1}$$
$$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\delta, \tag{2}$$

és innen

$$ad\cos\alpha-bc\cos\gamma=\frac{1}{2}(a^2-c^2)-\frac{1}{2}(b^2-d^2), \tag{1a}$$
$$ab\cos\beta-cd\cos\delta=\frac{1}{2}(a^2-c^2)+\frac{1}{2}(b^2-d^2). \tag{2a}$$

Ugyanezen háromszögpárokból a terület 2-szeresére

$$ad\sin\alpha+bc\sin\gamma=2t, \tag{1b}$$
$$ab\sin\beta+cd\sin\delta=2t. \tag{2b}$$

(1a) és (1b) az α és γ-ra, (2a) és (2b) a β és δ-ra nézve olyan típusú egyenletrendszer, amilyet az 1076. feladatban adott számokkal megoldottunk, ugyanis bármelyik szög koszinuszának és szinuszának együtthatói abszolút értékben egyenlők.[1]

A megoldási *eljárás* vázolása céljára az együtthatókat egy–egy új betűvel jelölve két rendszerünk közös általános alakja:

$$E\cos x-F\cos y=G, \tag{3}$$
$$E\sin x+F\sin y=H. \tag{4}$$

Az 1076/I-beli gondolatmenettel küszöböljük ki y-t, felírva azt, hogy $\cos y$ és $\sin y$ kifejezéseinek négyzetösszege 1-gyel egyenlő. Mindjárt F^2-nel szorozva:

$$(E\cos x-G)^2+(H-E\sin x)^2=F^2,$$
$$2EG\cos x+2EH\sin x=H^2+G^2+E^2-F^2. \tag{5}$$

Ilyen típusú egyismeretlenes trigonometriai egyenlet megoldását ugyanott az *a)* részben láttuk. Ismét új betűkkel általános alakja:

$$J\cos x+K\sin x=L. \tag{6}$$

A bal oldal egyik tagját különválasztva, majd négyzetre emeléssel x egyik függvényére másodfokú egyenletet kapunk:

$$J^2\cos^2 x=J^2-J^2\sin^2 x=L^2-2KL\sin x+K^2\sin^2 x,$$
$$(J^2+K^2)\sin^2 x-2KL\sin x+L^2-J^2=0, \qquad (J^2+K^2\neq 0)$$

ahonnan $\sin x$-re, majd (6) alapján $\cos x$-re

$$\sin x=\frac{KL\pm J\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}, \tag{7}$$
$$\cos x=\frac{L-K\sin x}{J}=\frac{JL\mp K\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}. \tag{8}$$

[1] Lásd ezen számban, 119. o. Az előjelek is mindkét rendszerben az egyik szögre egyenlők, a másikra ellentétesek; ez azonban lényegtelen, hiszen pl. α és γ ezen megkülönböztetett szerepe (1a)-nak (-1)-gyel való szorzásával felcserélődik.

Ez $J^2+K^2-L^2 \lesseqgtr 0$ esetén x-re 2, 1, 0 valós megoldást ad, és – mint az 1076/I. megoldásban láttuk – nincs szükség idegen gyökök eltávolítására. Ezekből (3) és (4) alapján egyértelműen megkapjuk a megfelelő y-t.

Ezzel megadtuk az eljárást a szögek kiszámítására. Ezekből az átlók (1) és (2) alapján számíthatók. Végül az átlók hajlásszögére

$$t=\frac{1}{2}ef\sin\varepsilon\text{-ból}\qquad \sin\varepsilon=\frac{2t}{ef}. \tag{9}$$

Ugyanis az átlókkal a csúcsokon át húzott párhuzamosok egy e, f oldalú és ε szögű paralelogrammát határoznak meg, és ezt az átlók négy paralelogrammára bontják. Ezek mindegyikének egyik átlója a négyszög egyik oldala, és így területük összegének fele adja a négyszög területét.

Számadatainkkal az α, γ szögpárra $E=ad=8$, $F=bc=18$, $G=(a^2-c^2-b^2+d^2)/2=10$, $H=2t=20$. Ezekből $x=\alpha$ céljára $J=2EG=160$, $K=2EH=320$, $L=H^2+G^2+E^2-F^2=240$, tehát 80-nal egyszerűsítve (6), (7) és (8) így alakul:

$$2\cos\alpha+4\sin\alpha=3,\quad \sin\alpha=\frac{6\pm\sqrt{11}}{10},\quad \cos\alpha=\frac{3\mp2\sqrt{11}}{10},$$

ahonnan $\alpha_1\approx 111{,}30^\circ$, $\alpha_2\approx 15{,}56^\circ$. – A (3) és (4)-nek megfelelő egyenletekből

$$\sin\gamma=\frac{38\mp2\sqrt{11}}{45},\quad \cos\gamma=\frac{-19\mp4\sqrt{11}}{45},\quad \gamma_1\approx135{,}81^\circ,\quad \gamma_2=97{,}32^\circ.$$

A β, δ szögpárra $x=\beta$-val hasonlóan $E=ab=3$, $F=cd=48$, $G=-45$, $H=20$, majd $J=-270$, $K=120$, $L=130$, és így $-27\cos x+12\sin x=13$, ill. $873\sin^2\beta-312\sin\beta-560=0$-ból

$$\sin\beta=\frac{52\pm72\sqrt{11}}{291},\quad \cos\beta=\frac{-117\pm32\sqrt{11}}{291},\quad \beta'\approx92{,}14^\circ,\quad \beta''\approx219{,}93^\circ,$$

végül

$$\sin\delta=\frac{236\mp9\sqrt{11}}{582},\quad \cos\delta=\frac{531\pm4\sqrt{11}}{582},\quad \delta'\approx20{,}74^\circ,\quad \delta''\approx27{,}18^\circ.$$

Mivel β és δ számítása független α és γ számításától, viszont az $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$ összefüggésnek teljesülnie kell, azért az összetartozó értékpárokat próbával kell megállapítanunk.

$$\begin{aligned}\alpha_1+\gamma_1&\approx247{,}11^\circ, &\qquad \beta'+\delta'&\approx112{,}88^\circ,\\ \alpha_2+\gamma_2&\approx112{,}88^\circ, &\qquad \beta''+\delta''&\approx247{,}11^\circ,\end{aligned}$$

ezért egyrészt az α_1, γ_1 pár a β', δ' párral, másrészt az α_2, γ_2 pár a β'', δ'' párral alkot egy megoldást.

Ez a megfelelő párba állítás általában is lehetséges, és az észrevehető $(\alpha_1+\gamma_1)+(\alpha_2+\gamma_2)=(\beta'+\delta')+(\beta''+\delta'')=360^\circ$ összefüggés is mindig fennáll. Ha ugyanis az 1076/II. megoldáshoz főzött megjegyzés eljárásával az (1a), (1b), ill. (2a), (2b) rendszerekből kiszámítjuk $\cos(\alpha+\gamma)$-t, $\cos(\beta+\delta)$-t, akkor egyrészt mindegyikre egyetlen értéket kapunk, másrészt ez a két érték egyenlő. Valóban, az egyenletpárokat négyzetre emelve és összeadva

$$\begin{gathered}a^2d^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma)+b^2c^2=\\ =\frac14(a^2-c^2)^2-\frac12(a^2-c^2)(b^2-d^2)+\frac14(b^2-d^2)^2+4t^2,\\ a^2b^2-2abcd\cos(\beta+\delta)+c^2d^2=\\ =\frac14(a^2-c^2)^2+\frac12(a^2-c^2)(b^2-d^2)+\frac14(b^2-d^2)^2+4t^2,\end{gathered}$$

és innen, csekély átalakítással

$$\begin{gathered}8abcd\cos(\alpha+\gamma)=8abcd\cos(\beta+\delta)=2(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(a^2-c^2)^2-\\ -(b^2-d^2)^2-16t^2.\end{gathered}$$

Számadatainkkal $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\delta)=-7/18\approx-0{,}3889$.

Most már az átlókra (1) és (2)-ből

$$\begin{gathered}f^2=65-16\cos\alpha=45-36\cos\gamma=\frac15(301\pm16\sqrt{11}),\\ e^2=10-6\cos\beta=100-96\cos\delta=\frac{4}{97}(301\mp16\sqrt{11}),\end{gathered}$$

amiből $e_1\approx3{,}198$, $f_1\approx8{,}415$; $e_2\approx3{,}822$, $f_2\approx7{,}042$.

Innen (9) céljára

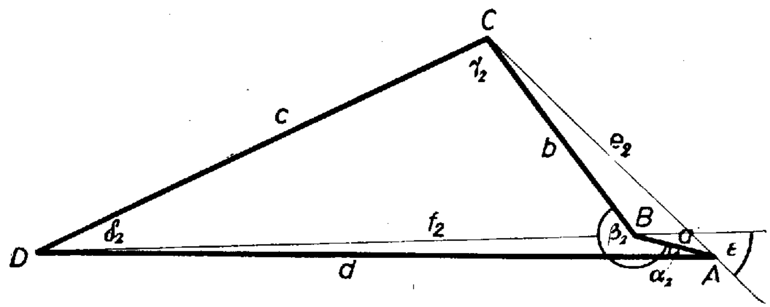
$$e^2f^2 = \frac{4}{5\cdot 97}(301^2 - 16^2\cdot 11) = 4\cdot 181,$$

és így $\sin\varepsilon = 10/\sqrt{181}$, amiből az átlók közti hegyes szög mindkét megoldásra $\varepsilon \approx 48{,}01^\circ$.

Eredményeinket összefoglalva

$\alpha_1 \approx 111{,}30^\circ$,	$\beta_1 \approx 92{,}14^\circ$,	$\gamma_1 \approx 135{,}81^\circ$,	$\delta_1 \approx 20{,}74^\circ$,	$\varepsilon \approx 48{,}01^\circ$;
$\alpha_2 \approx 15{,}56^\circ$,	$\beta_2 \approx 219{,}93^\circ$,	$\gamma_2 \approx 97{,}32^\circ$,	$\delta_2 \approx 27{,}18^\circ$,	$\varepsilon \approx 48{,}01^\circ$;
	$e_1 \approx 3{,}198$,		$f_1 \approx 8{,}415$;	
	$e_2 \approx 3{,}822$,		$f_2 \approx 7{,}042$.	

A második megoldás B-nél homorú szögű négyszöget ad (2. ábra), az AC átló a négyszögön kívül fekszik, a négyszög területét az ACD és ACB háromszögek területének különbsége adja.



2. ábra

(2b) így is érvényes, ekkor ugyanis $\sin\beta$ negatív.

Dömötör Gyula (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)
Nyárasdy Zsófia (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. IV. o. t.)
Nováky Béla (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. A négyszög területe egyenlő az ACB és ACD háromszögek területének összegével. Ez utóbbiakat a Heron–képlet felhasználásával az oldalakkal és az $AC = e$ átlóval kifejezve egyenletet kapunk e-re (4-gyel szoroztunk):

$$\begin{aligned}4t &= \sqrt{(a+b+e)(a+b-e)(e+a-b)\big[e-(a-b)\big]}+\\ &+\sqrt{(c+d+e)(c+d-e)(e+c-d)\big[e-(c-d)\big]} =\\ &= \sqrt{\big[(a+b)^2-e^2\big]\big[e^2-(a-b)^2\big]}+\sqrt{\big[(c+d)^2-e^2\big]\big[e^2-(c-d)\big]^2}.\end{aligned}$$

Az egyik gyökös kifejezést különválasztva négyzetre emelés után e^4 kiesik, és csak egy gyökös kifejezés marad az egyenletben. Ismét különválasztással négyzetre emelés után e^2-re másodfokú egyenletet kapunk. – A számadatokkal

$$\begin{gathered}\sqrt{(16-e^2)(e^2-4)}+\sqrt{(196-e^2)(e^2-4)} = 40,\\ -e^4+200e^2-784 = 1600-80\sqrt{(16-e^2)(e^2-4)}-e^4+20e^2-64,\\ 4\sqrt{(16-e^2)(e^2-4)} = 116-9e^2,\\ -16e^4+320e^2-1024 = 13456-2088e^2+81e^4,\\ 97e^4-2408e^2+14480 = 0,\end{gathered}$$

amiből a fenti értékek adódnak.

Hasonlóan számítva f-et, a szögek a részháromszögekből koszinusz tétellel számíthatók. Számíthatók az átlókkal kettévágott szögek részei is, pl. a BAC és DBA szögek és ezek összege a BMC szög. Csak azok az e, f összepárosítások megfelelők, amelyekkel az ABD háromszögből számított $BAD\sphericalangle$ egyenlő az ABC és ADC-ből számított BAC és DAC szögek összegével, ill. különbségével.

Zalán Péter (Aszód, Petőfi S. g. III. o. t.)