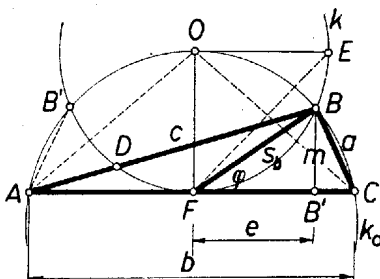


I. megoldás. 1. A szokásos jelölésekkel a feltétel $b = 2\sqrt{ac}$, azaz $b^2 = 4ac$. Feltehetjük, hogy $a < c$, ugyanis $a = c$ mellett $b = 2a = a + c$, vagyis a háromszög egyenlőtlenség nem teljesül. Legyen az AC oldal felezőpontja F , a B -ből húzott magasság talppontja B' – ekkor $BF = s_b$, $BB' = m$, a vizsgálandó hegyes szög $BFC = \varphi$, végül $FB' = e$.



1. ábra

A $BB'A$, $BB'C$ és $BB'F$ derékszögű háromszögekből:

$$(1) \quad c^2 = m^2 + \left(\frac{b}{2} + e\right)^2,$$

$$(2) \quad a^2 = m^2 + \left(\frac{b}{2} - e\right)^2,$$

$$(3) \quad m^2 + e^2 = s_b^2.$$

Írjuk (3) felhasználásával (1) és (2)-t így:

$$(1') \quad c^2 = \left(m^2 + \frac{b^2}{4} + e^2\right) + be = \left(s_b^2 + \frac{b^2}{4}\right) + be,$$

$$(2') \quad a^2 = \left(m^2 + \frac{b^2}{4} + e^2\right) - be = \left(s_b^2 + \frac{b^2}{4}\right) - be,$$

és szorozzuk össze a megfelelő oldalakat:

$$(4) \quad c^2 a^2 = \frac{b^4}{16} = \left(s_b^2 + \frac{b^2}{4}\right)^2 - b^2 e^2 = s_b^4 + \frac{b^4}{16} + \frac{b^2}{2}(s_b^2 - 2e^2),$$

$$\frac{b^2}{2}(e^2 - m^2) = s_b^4.$$

A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, tehát $e > m$. Így a $BB'F$ derékszögű háromszögben a BB' befogóval szemben levő φ szög a kisebb hegyes szög, s így $\varphi < 45^\circ$. Ezt kellett bizonyítanunk.

2. Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor a B csúcs kívül van az AC átmérőjű körön, tehát $s_b > b/2$, továbbá a B' talppont az FC szakasz belsejében van, tehát $e < b/2$. Levonva (3)-ból (4)-nek $2/b^2$ -szeresét, az első követelmény szerint

$$2m^2 = s_b^2 \left[1 - 2\left(\frac{s_b}{b}\right)^2\right] < s_b^2 \left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{s_b^2}{2},$$

és így

$$m < \frac{s_b}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{m}{s_b} < \frac{1}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

Ahhoz, hogy φ -re alsó korlátot kapjunk, (4)-et átalakítjuk, beírva az $e = s_b \cos \varphi$, $m = s_b \sin \varphi$ összefüggést. Ekkor s_b^2 -nel átosztva kapjuk, hogy

$$(5) \quad \frac{b^2}{2}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{b^2}{2} \cos 2\varphi = s_b^2.$$

Így az $e < b/2$ feltételből, felhasználva a $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ összefüggést és (5)-öt

$$e^2 = s_b^2 \cos^2 \varphi = \frac{s_b^2}{2}(1 + \cos 2\varphi) < \frac{b^2}{4} = \frac{s_b^2}{2 \cos 2\varphi}.$$

Innen az aláhúzott részben egyszerűsítéssel és a pozitív $\cos 2\varphi$ -vel átszorozva az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$$\cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi - 1 < 0.$$

A bal oldal akkor válik 0-vá, ha $2 \cos 2\varphi = -1 \pm \sqrt{5}$, ennek alapján a bal oldalt szorzattá alakítva

$$\left(\cos 2\varphi + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) < 0,$$

végül mivel az első tényező pozitív:

$$\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 0, \quad \cos 2\varphi < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,6180,$$

azért $2\varphi > 51,8^\circ$, és $\varphi > 25,9^\circ$.

Ezek szerint a feltételt teljesítő hegyesszögű háromszögben $25,9^\circ < \varphi < 30^\circ$.

Szidarovszky Ágnes (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. III. o. t.)

II. megoldás. (*a feladat 1. részére*). Tekintsük azt a k kört, amely átmegy B -n és az AC oldalt F -ben érinti (1. ábra). Legyen k középpontja O , AB -vel való második metszéspontja D . Ekkor egyrészt a kör szelőjére és érintőjére vonatkozó tétel, másrészt a feltevés alapján

$$\left(\frac{AC}{2} \right)^2 = AF^2 = AD \cdot AB = CB \cdot AB,$$

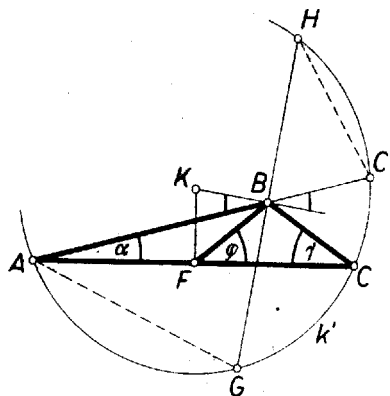
ennélfogva $AD = CB$. Legyen B tükröképe AC felező merőlegesére, vagyis FO -ra B' , ekkor B' a k -n van, továbbá $AB' = CB = AD$. Nem lehet, hogy D egybeessen B' -vel, mert $DAC \sphericalangle = BAC \sphericalangle < BCA \sphericalangle = B'AC \sphericalangle$, ezért D és B' tükrös pár OA -ra. Így

$$\begin{aligned} DAC \sphericalangle = B'AC \sphericalangle &= 2 \cdot OAC \sphericalangle = OAC \sphericalangle + OCA \sphericalangle = 180^\circ - AOC \sphericalangle, \quad \text{és} \\ DAC \sphericalangle + B'AC \sphericalangle &= BAC \sphericalangle + BCA \sphericalangle = 180^\circ - ABC \sphericalangle, \end{aligned}$$

vagyis $AOC \sphericalangle = ABC \sphericalangle$. Ezért AC az ugyanazon oldalán levő O és B pontokból ugyanakkora szögben látszik, tehát O rajta van az ABC háromszög k_0 körülírt körén. A szimmetria miatt O a k_0 kör AOC ívének AC -től legtávolabbi pontja, tehát B közelebb van AC -hoz, mint O . Megrajzolva k -nak FC -vel párhuzamos és egyirányú OE sugarát, az FB ív kisebb az FE negyedkörívnél, és így az ezeken fekvő $BFC \sphericalangle = \varphi$ és $EFC \sphericalangle = 45^\circ$ kerületi szögekre $\varphi < 45^\circ$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. (*a feladat 1. részére*). Mérjük rá a BC szakaszt az AB oldal B -n túli meghosszabbítására, legyen a végpont C' . Rajzoljuk meg az ACC' háromszög körülírt körét, legyen ez k' és a középpontja K , továbbá k' -nek B -n átmenő, KB -re merőleges GH húrját (2. ábra).



2. ábra

Így B felezi a GH húrt, továbbá az ABG és HBC' háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők. Ezért $BA : BG = BH : BC'$. Felhasználva ezt, C' szerkesztését és a feltevést, nyerjük:

$$BG^2 = BG \cdot BH = BA \cdot BC' = BA \cdot BC = AF^2.$$

Innen $BG = AF$, tehát $GH = AC$, és mivel egyenlő hosszú húrok egyenlő távolságra vannak a középponttól, azért $KB = KF$. Így a KBF háromszög egyenlő szárú, és $KBF \sphericalangle = KFB \sphericalangle = 90^\circ - \varphi$.

A BCC' háromszög egyenlő szárú és K rajta van a tengelyén, ezért a KB egyenes felezi a $CBC' \sphericalangle = \alpha + \gamma$ szöveget. Így

$$\begin{aligned} ABF \sphericalangle &= KBF \sphericalangle - KBA \sphericalangle = 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \text{és} \\ \varphi = BFC \sphericalangle &= FAB \sphericalangle + ABF \sphericalangle = \alpha + 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \text{tehát} \\ 2\varphi &= 90^\circ - \frac{\gamma - \alpha}{2} < 90^\circ, \quad \text{és} \quad \varphi < 45^\circ. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szegő Károly (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az utolsó lépésből hegyes szögű háromszög esetén φ -re a következő becslés is adódik:

$$2\varphi = 90^\circ - \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{2\alpha + \beta}{2} > \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{90^\circ}{2}, \quad \varphi > 22,5^\circ.$$

Ez valamivel rosszabb, mint amit az I. megoldásban kaptunk.