R. Badia, olasz tanár, a *Journal de Math. Élément.* 25. kötetében a gömb köbtartalmának meghatározására következő eljárást mutatja be.

1. Ha n positív egész szám, akkor az

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots(n-1)^2}{n^3}$$

kifejezés határértéke $\frac{1}{3}$, ha n határtalanul nő.

Ha ugyanis a positív egész szám, akkor

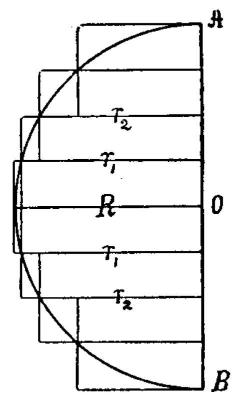
$$\frac{(a+1)^3-a^3}{3}>a^2>\frac{a^3-(a-1)^3}{3},$$

miből, ha a helyébe rendre $1,\ 2,\ 3,\ \dots n-1$-et teszünk s a nyert kifejezéseket összeadjuk:

$$\frac{1-\frac{1}{n^3}}{3}>\frac{1^2+2^2+3^2+\dots(n-1)^2}{n^3}>\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{3},$$

mely egyenlőtlenség végtelen nagy n esetében állításunkat igazolja.

2. Legyen O a félkör középpontja, AB az átmérője. AB-t felosztjuk $2n$ egyenlő részre, az osztási pontokon át az átmérőre merőlegeseket rajzolunk, azután ama pontokon át, melyekben eme merőlegesek a kör kerületét metszik, az átmérővel párhuzamosokat húzunk.



Ha most az egész idom az AB átmérő körül forog, akkor a keletkező gömböt körülveszi $2n$ henger, a gömb pedig magába zár $2(n-1)$ hengert.

Ha az egymásra következő hengerek alapjainak sugarát $R,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots,\ r_{n-1}$-gyel, a nagyobb hengerek köbtartalmának összegét S-sel, a kisebbek köbtartalmának összegét pedig s-sel jelöljük, akkor:

$$S=(R^2+r_1^2+r_2^2+\dots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n},$$

$$s=(r_1^2+r_2^2+r_3^2+\dots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n},$$

miből

$$S-s=\frac{2\pi R^3}{n}.$$

Ha n határtalanul nő, $S-s$ közeledik 0 felé; S folyton kisebbedik, s folyton nő s mindkettőnek értéke megközelíti a gömb köbtartalmát. Ha n végtelenné lesz, akkor a gömb köbtartalma egyenlő a változó S és s határértékével, vagyis:

$$V=\lim.S=\lim.(R^2+r_1^2+r_2^2+\dots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n};$$

de

$$r_1^2=R^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ r_2^2=R^2\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right),\ \dots,\ r_{n-1}^2==R^2\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right),$$

s így

$$V=\lim.\left(1-\frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}\right)2\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3.$$