Ha egy egyenes kúpot az alappal nem párhuzamos síkkal úgy metszünk, hogy a metszet ellipsis és ha p és q a nagy tengely távolságai a kúp csúcsától, α a kúp oldalvonalai általt bezárt szög; ha továbbá az ellipsis fél nagy tengelye a, a fél kis tengelye b, akkor

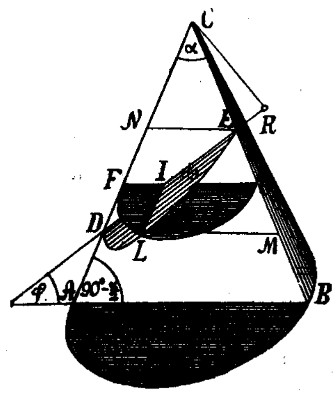
$$b=\sqrt{pq\cdot\sin\frac{\alpha}{2}},$$

az excentricitás

$$e=\frac{p-q}{2}$$

és a lemetszett darab köbtartalma:

$$k=\frac{\pi(pq)^{\frac{3}{2}}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3}.$$



Legyen ABC a kúp tengelymetszete,

$$AC=s;\ AB=2r,\ DE=2a.$$

Felezzük DE-t úgy, hogy $DI=IE$ és fektessünk I ponton át az alappal párhuzamos síkot, akkor ezen sík az ABC síkon merőlegesen áll; ennélfogva

$$IL\perp DE \ \text{ és } \ IL=b,\qquad IL^2=IG\cdot IF;\qquad IG=\frac{DM}{2},\qquad IF=\frac{EN}{2},$$

továbbá

$$CD:DM=AC:AB\qquad\text{vagy}\qquad p:DM=s:2r$$

miből

$$DM=\frac{2pr}{s}\quad\text{hasonlóképpen}\quad EN=\frac{2qr}{s},$$

továbbá

$$IL^2=b^2=IG\cdot IF=\frac{pqr^2}{s^2},$$

tehát

$$b=\frac{r}{s}\sqrt{pq},\quad\text{de}\quad\frac{r}{s}=\sin\frac{\alpha}{2}$$

s így

$$b=\sqrt{pq}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Carnot tételét alkalmazva:

$$4a^2=p^2+q^2-2pq\cos\alpha=(p-q)^2+2pq(1-\cos\alpha)$$
$$4a^2=(p-q)^2+4pq\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

és

$$a^2=\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+pq\sin^2\alpha=\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+b^2,$$

ennélfogva

$$\sqrt{a^2-b^2}=e=\frac{p-q}{2}.$$

Számítsuk ki az elvágott darab köbtartalmát:

$$k=\frac{ab\pi}{3}\cdot CR,\quad\text{de}\quad CR=p\sin CDE,$$

továbbá

$$q : 2a = \sin CDE : \sin\alpha,$$

miből

$$\sin CDE = \frac{q\sin\alpha}{2a},$$

ennélfogva:

$$CR = \frac{pq\sin\alpha}{2a},$$

tehát

$$k = \frac{ab\pi}{3}\cdot\frac{pq}{2a}\sin\alpha = \frac{bpq\pi\sin\alpha}{6},$$

s így b értékét helyettesítve:

$$k = \frac{pq\sqrt{pq}\pi}{6}\cdot\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi\cdot(pq)^{\frac{3}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3}.$$

Ezek után fektessünk D ponton át egy síkot, mely a kúpot úgy osztja, hogy a lemetszett kúp köbtartalma csonka kúpéhoz úgy aránylik, mint $m : n$.

Legyen K az egész kúp köbtartalma, k a lemetszett darabé, akkor

$$k = \frac{m}{m+n}K = \frac{m}{m+n}\frac{r^2\pi h}{3},$$

de

$$r = s\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\qquad h = s\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

s így

$$k = \frac{\pi(pq)^{\frac{3}{2}}}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{m+n}\frac{\pi s^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3}$$

$$(pq)^{\frac{3}{2}} = s^3\frac{m}{m+n},\qquad p^3q^3 = s^6\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

$$pq = s^2\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}\quad\text{és}\quad q = \frac{s^2}{p}\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}.$$

A feladat megoldhatására szükséges, hogy

$$s \geqq \frac{s^2}{p}\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}$$

legyen, vagyis

$$p \geqq s\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2};$$

ha $m = n$, azaz D ponton át a kúp két egyenlő részre bontandó, akkor

$$q = \frac{s^2}{p}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Ha a kúpot az alappal párhuzamos síkkal metsszük, azaz $p = q$, akkor

$$b = p\sin\frac{\alpha}{2},\ e = 0,\ p = s\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

Egy az alap kerületén fekvő ponton át síkok fektetendők, melyek a kúpot μ egyenlő részre osztják.

Ekkor

$$p = s,\ q = s\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2},\ m+n = \mu,\ m = 1,$$

$$q_1 = s\sqrt[3]{\frac{1}{\mu^2}},\ q_2 = s\sqrt[3]{\frac{4}{\mu^2}},\ q_3 = s\sqrt[3]{\frac{9}{\mu^2}},\ \ldots\ q_{\mu-1} = s\sqrt[3]{\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2}}.$$

A kúp az alappal φ szöget bezáró sík által metszendő úgy, hogy a részek köbtartalmainak aránya legyen $m : n$.

Ekkor

$$CDE = 90^\circ\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right), \quad CED = 90^\circ\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

továbbá:

$$p : q = \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) : \cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right),$$

miből

$$q = \frac{p \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

és

$$pq = s^2 \sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2},$$

vagy

$$\frac{p^2 \cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)} = s^2 \sqrt[2]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}$$

és

$$p = s\sqrt{\frac{\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}}\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$