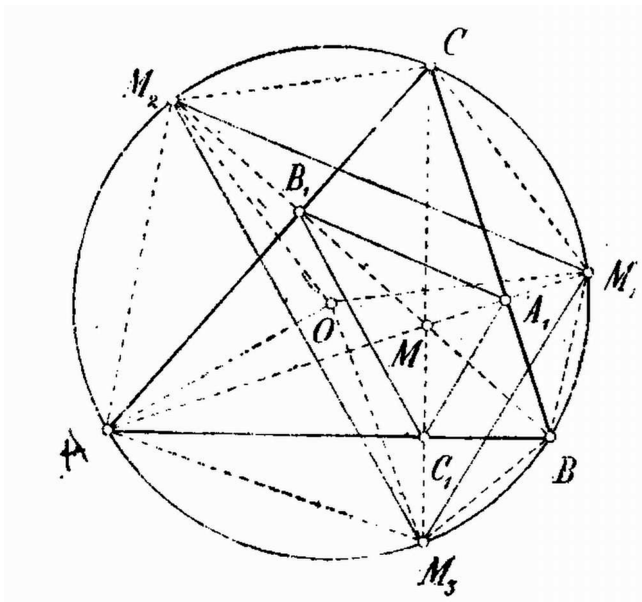
A talpponti háromszög tulajdonságait gyakran találjuk számítások segítségével bebizonyítva. A következő sorokban olyan tételre mutatok rá, a melynek alapján sok esetben a szorosabb értelemben vett geometriai módszerekre vihető vissza az említett tulajdonságok levezetése. Azután a tétel alkalmazására adok példát.

Az említett tétel a következő:

1. *A háromszög magasságpontjának az oldalakra vonakozó tükörképei a háromszög köré írt körön feküsznek.*

Legyen az ABC háromszög magasságpontja M, a magasságok talppontjai a $BC, CA,\ AB$ oldalakon sorra $A_1,\ B_1,\ C_1$; a magasságpontnak ugyanezen oldalakra vonatkozó tükörképei $M_1,\ M_2,\ M_3$.



Minthogy M_1 az AA_1 meghosszabbításán van és $M_1A_1 = A_1M$, azért

$$BM_1A_1\triangle \cong BMA_1\triangle$$

és

$$CM_1A_1\triangle \cong CMA_1\triangle$$

Tehát

$$BM_1 = BM$$

és

$$CM_1 = CM.$$

Ebből következik még:

$$BM_1C\triangle \cong BMC\triangle,$$

úgy, hogy

(1) $$BM_1C\sphericalangle = BMC\sphericalangle.$$

A további bizonyításban elválasztjuk a hegyes- és a tompaszögű háromszög esetét.

a) Hegyesszögű háromszögben:

$$BMC\sphericalangle = 180^\circ - [90^\circ - B\sphericalangle + 90^\circ - C\sphericalangle]$$

azaz:

(2) $$BMC\sphericalangle = 180^\circ - A\sphericalangle,$$

Tehát

$$BAC\sphericalangle + BM_1C\sphericalangle = 180^\circ,$$

a mi M_1 pontra a kimondott tételt igazolja.

b) Tompaszögű háromszögben: $(C\sphericalangle > 90^\circ)$ most M külső pont lévén,

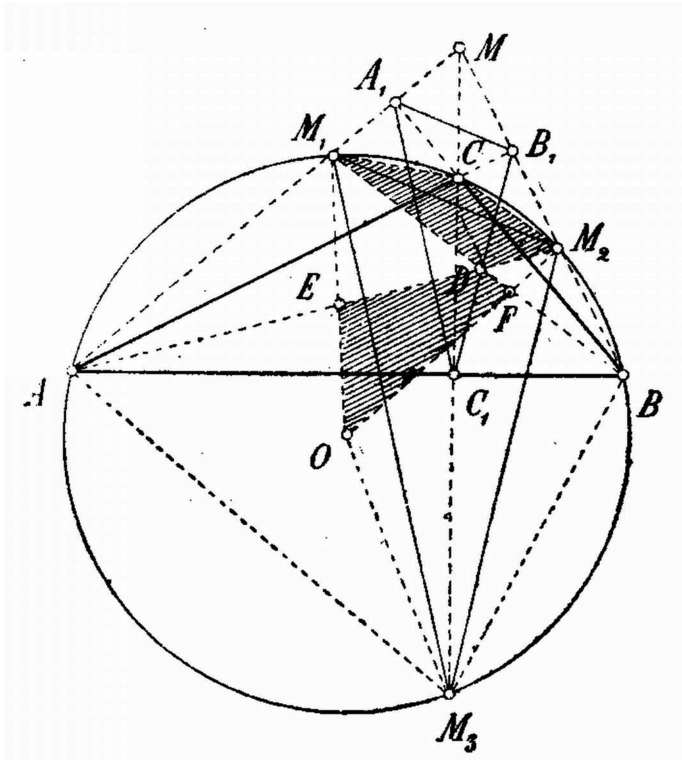
$$BMC\sphericalangle = 90^\circ - A_1BA\sphericalangle = 90^\circ - [90^\circ - A\sphericalangle]$$

(3) $$BMC\sphericalangle = A\sphericalangle,$$

tehát

$$BM_1C\sphericalangle = BAC;$$

a mi a tételt erre az esetre is helyesnek mutatja.



A bizonyítás M_2 pontra egészen hasonló, M_3 pontra nézve az a) alatti bizonyítás tompaszögű háromszögnél is változatlan marad (ha $C\sphericalangle > 90°$).

Ennek a tételnek felhasználásával a *Feuerbach*-féle körre vonatkozó tételek egy része könnyen bizonyítható. Például ez:

2. *A Feuerbach-féle kör sugara a háromszög köré írható kör sugarának fele.*

Az ABC háromszög köré írható kör sugarát jelölje r, az $A_1B_1C_1$ köré írottét (*A Feuerbach-féle körét)* r_1. Minthogy $M_1M_2M_3$ ugyanazon körbe van írva, mint ABC, azonkívül

$$M_1M_2M_3\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$$

és a hasonlóság arányszáma $2:1$, azért még

$$r : r_1 = 2 : 1,$$

a honnan

(4) $$r_1 = \frac{1}{2}r$$

A háromszög területére nézve a következő tétel alapján nyerhetünk kifejezést:

3. *A háromszög csúcspontjai és a magasságpont tükörképei meghatározta hatszög területe a háromszög kétszerese.*

Itt újra külön kell választanunk a hegyes- és tompaszögű háromszög esetét.

a) Hegyesszögű háromszög esetében az előbbi jelölésekkel élve, a hatszög csúcsai ilyen rendben következnek a körön: $AM_3BM_1CM_2A$. A tétel maga szinte nyilvánvaló, mivel

$$ABC = AMB + BMC + CMA$$

és

$$AM_3B\triangle \cong AMB\triangle, \quad BM_1C\triangle \cong BMC\triangle, \quad CM_2A\triangle \cong CMA\,\triangle\,.$$

Tehát valóban

(5) $$AM_3BM_1CM_2 = 2ABC.$$

b) Ha a háromszög *tompaszögű* ($C > 90°$), akkor óvatosan kell eljárnunk.

Mindenekelőtt a hatszög csúcsait most is az *előbbi rendben* vesszük. Azonban, mivel M külső pont, M_2 és M_1 a BC, illetőleg CA köríven lesznek (l. a 2. rajzot). Ezért a hatszög kerülete önmagát *metszi.*

Olyan idomoknál, melyeknek kerülete önmagát metszi, a *terület* értelmezésére külön megállapodás szokásos (l. *Baltzer*: Elemente der Mathematik 11. 64–65. l.)

A mostani esetnél elég a következő megállapítás:

Felbontjuk a hatszöget olyan idomokra, a melyek kerülete nem metszi önmagát. Az ilyen idomok területének előjelet tulajdonítunk. A területet *positív*nak vesszük, ha a kerületet az óramutató járásával *ellenkező* irányban jártuk körül, *negatív*nak az ellenkező esetben.

E szerint az $AM_3BM_1CM_2A$ hatszög területét az AM_3BD és a DM_2CM_1 részekre bontjuk. Ha a felírt sorban az egész kerületet végig járva gondoljuk, könnyű látni, hogy az AM_3BD területet positív, a DM_2CM_1-et negatív jellel kell vennünk, úgy, hogy

(6) $$AM_3BM_1CM_2 = AM_3BD - DM_2CM_1.$$

Más részről:

$$ABC = ABM - ACM - CBM.$$

De

$$ABM\triangle \cong ABM_3\triangle, \quad ACM\triangle \cong ACM_2\triangle, \quad CBM\triangle \cong CBM_1\triangle$$

lévén, írhatjuk:

$$ABC = ABM_3 - ACM_2 - CBM_1$$

és

(6') $$2ABC = ABM_3 + ABC - ACM_2 - CBM_1.$$

Azonban

$$ABC - ACM_2 - CBM_1 = ABD - DM_2CM_1;$$

a mit $6')$-be írva és tekintetbe véve, az

$$AM_3B + ABD = AM_3BD,$$

egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

(7) $$2ABC = AM_3BD - DM_2CM.$$

A 7) és 6)-nak egybevetése mutatja, hogy ilyen megállapítások után a tétel tompaszögű háromszögre is helyes.

Ezután geometriai úton bebizonyítható:

4. *Hegyesszögű háromszög területét megkapjuk, ha a talpponti hóromszög kerületét szorozzuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarának felével.* (K. M. L. IX. 26. l. 842. feladat.)

Legyen O a háromszög köré írt kör középpontja, r a sugara. Húzzuk meg az OA, OB, OC sugarakat, és kössük össze O-t sorra M_1, M_2, M_3-mal is. Így az $AM_3BM_1CM_2$ hatszög területét felosztottuk három négyszögre: OM_2AM_3, OM_3BM_1, OM_1CM_2. Ezek mindegyike delta négyszög, melyeknek egyik átlója a kör sugara, másik átlója az $M_1M_2M_3$ háromszögnek egyik oldala.

E szerint

$$OM_2AM_3 = \frac{1}{2}r \cdot M_2M_3, \quad OM_3BM_1 = \frac{1}{2}r \cdot M_3M_1, \quad OM_1CM_2 = \frac{1}{2}r \cdot M_1M_2;$$

a 3. tételt alkalmazva, írhatjuk:

$$2ABC = \frac{1}{2}r[M_2M_3 + M_3M_1 + M_1M_2].$$

Tekintetbe véve az $M_1M_2M_3$ és$A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóságát:

$$M_2M_3 = 2B_1C_1, \; M_3M_1 = 2C_1A_1, \; M_1M_2 = 2A_1B_1;$$

úgy hogy ezeket az előbbi kifejezésbe beírva és azután egyszerűsítve:

(8) $$ABC = \frac{1}{2}r[B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1].$$

Ha a talpponti háromszög kerületét $2p_1$-gyel jelöljük, akkor még:

(8') $$ABC = r \cdot p_1.$$

5. *Tompaszögű háromszög területét megkapjuk, ha a talpponti háromszög kerületének és a háromszögön kívül fekvő oldala kétszeresének különbségét szorozzuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarának felével.*

Az O pontot éppen úgy összekötjük a hatszög csúcsaival, mint a 4. tétel bizonyításánál. A 3. *b)* alattiak értelmében

$$2ABC = AM_3BD - DM_2MCM_1. \tag{9}$$

Azonban

$$AM_3BD = AM_3OE + EOFD + FOM_3B$$

és azonosan írható

$$AM_3BD - DM_2CM_1 = (AM_3OE + EOFD + DFM_2) +$$
$$(FOM_3B + EOFD + EDM_1) - (EOFD + DFM_2 + EDM_1 + DM_2CM_1).$$

A zárójelbe írt területek azonban az előbbi delta négyszögeket adják, úgy hogy

$$2ABC = AM_3OM_2 + BM_1OM_3 - CM_1OM_2;$$

a négyszögek területeit úgy, mint előbb kifejezve, és a talpponti háromszögnek az $M_1M_2M_3$ háromszöghöz való viszonyát tekintetbe véve:

$$ABC = \frac{1}{2}r \cdot [B_1C_1 + C_1A_1 - A_1B_1],$$

vagy

$$ABC = \frac{1}{2}[B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 - 2A_1B_1]. \tag{10}$$

Ha a talpponti háromszög kerületét újra $2p_1$-gyel az A_1B_1 oldalt röviden c_1-gyel jelöljük, még írható:

$$ABC = r(p_1 - c_1). \tag{10'}$$

Megjegyzés. A $8'$) és $10'$) segítségével felírhatjuk a háromszög és talpponti háromszög területének viszonyát. Ha először is hegyesszögű a háromszög, és a talpponti háromszög oldalait belülről érintő kör sugara p_1, akkor

$$A_1B_1C_1 = \rho_1 \cdot p_1$$

lévén,

$$ABC : A_1B_1C_1 = r : \rho_1. \tag{11}$$

Tompaszögű háromszögnél a 11) úgy helyes, ha ρ_1 annak az érintő körnek sugarát jelenti, a melyik a talpponti háromszögnek az eredeti háromszögön kívül fekvő oldalát kívülről érinti.[1]

Derékszögű háromszögnél a 8) és 10) képletek átmennek a terület közönséges kifejezésébe. A 11) pedig elveszti értelmét.

Említésre méltónak tartom, hogy az 1) tétel haszonnal alkalmazható a *Simson*-egyenesre vonatkozó tételek bebizonyításánál is.

---

[1] A 4) – 5) alattiakra nézve v. ö. *Baltzer* Elemente der Mathematik II. 309–310. l., a hol a hegyes- és tompaszögű háromszög közötti különbség nincs elég élesen kiemelve.