A számtani művelet, mellyel valamely számot nyerek, az új számot teljesen meghatározza. Tekintsük át az egyes számtani műveleteket és nézzük, hogy milyen számok ismeretére segítenek bennünket.

A legegyszerűbb számtani művelet a számlálás: egy, kettő é. í. t. Ennek eredményeképp jutunk a positív egész számok fogalmához. A positív egész számokat tekinthetjük a legelemibb számoknak. Valamely $a$ számot $\frac{\text{nagyobbnak}}{\text{kisebbnek}}$ mondunk $b$-nél, $\frac{a>b}{a<b}$, ha a számsorban $\frac{\text{utóbb}}{\text{előbb}}$ áll a $b$-nél. A positív egész számok valamennyie nem írható fel, mert mindeniknél tudok még nagyobbat mondani. Azt a számot, mely minden képzelhetőnél is nagyobb, végtelennek nevezzük. Jele $\infty$.

Bármely két positív egész számot választok ki, mindig véges számmal vannak oly positív egész számok, melyek a kiválasztott két szám kisebbikénél nagyobbak, a nagyobbikánál kisebbek, tehát a két szám között vannak. Két positív egész szám összege vagy szorzata, vagy bármely positív egész szám bármely positív egész hatványa ismét positív egész számot ad. A positív egész számok körében tehát ezek az ú. n. direkt műveletek mindig elvégezhetők, míg az ú. n. inverz műveletek: a kivonás, osztás és gyökvonás a számkör szükségszerű kibővítésére vezetnek, mert ezen műveletek a positív egész számok körében nem mindig végezhetők el.

Célszerű azonban, ha a számtani műveleteket, mint egyenletek megoldási módszerét fogjuk fel. Ha $x$-szel jelöljük az ismeretlent, akkor az összeadás műveletét értelmezi a következő egyenlet:

$$a+b=x \tag{1}$$

A kivonást:

$$b+x=a,$$

honnan

$$x=a-b \tag{2}$$

A szorzást:

$$ab=x. \tag{3}$$

Az osztást:

$$bx=a,$$

honnan

$$x=a:b,\ \text{vagy}\ x=\frac{a}{b}. \tag{4}$$

A hatványozást:

$$a^n=x. \tag{5}$$

A gyökvonást:

$$x^n=a,$$

honnan

$$x=\sqrt[n]{a}. \tag{6}$$

A (2) megoldása sikerül, ha $a>b$. Ha azonban $a<b$ (pl. $5-7$), akkor a positív egész számok sorában nem találunk oly számot, mely $b$-hez adva $a$-t adná: összegül. Ha tehát a (2) egyenlet megoldását minden esetben biztosítani akarjuk, akkor oly számot szerkesztünk, melynek a kívánt tulajdonsága megvan. Így az $5-7$ számot mínus kettőnek $(-2)$ nevezzük. Az így nyert számok a negatív egész számok sorát alkotják. Itt is bármely kettő nagyságra nézve összehasonlítható és bármely kettő között véges számmal vannak egész számok. A negatív egész számok legkisebbike szintén nem írható fel, mert mindegyiknél tudok még kisebbet felírni. Azt az értéket, mely bármelyik egész számnál kisebb $-\infty$-nel jelöljük.

Ha a kisebbítendő és kivonandó egyenlő, akkor ismét egy új számot nyerünk. Két egyenlő szám különbségét zérusnak (0) nevezzük.

A positív és negatív egész számok és a zérus együttesen az egész számok körét adják, a hol az egymásután következő számok különbsége egy:

$$-\infty,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots,\ +\infty.$$

Az egész számok körében mindig végezhető műveletek: az összeadás, kivonás, szorzás és a positív egész kitevőjű hatványozás.

Már a (4) egyenlet megoldása az egész számok körében csak akkor sikerül, ha az osztandó az osztónak többszöröse. Hogy az egyenlet megoldhatása minden esetben biztosítva legyen, tágítani fogjuk számkörünket. Az új számokat törtszámoknak nevezzük. Pl. nincs olyan egész szám, mely 2-vel szorozva 3-at adna. Mégis én azt a számot, mely 2-vel szorozva 3-at ad, így jelölöm $\frac{3}{2}$ és törtszámnak nevezem. Általában $\frac{a}{b}$ az a szám, a mely $b$-vel szorozva $a$-t ad.

Bármelyik két tört nagyságra nézve összehasonlítható. Egyenlő nevezővel bíró törtek közül az a nagyobbik, a melyiknek számlálója nagyobb. Különböző nevezőjű törteket előbb egyenlő nevezőjű törtekké kell átalakítanunk. Pl.

$$\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{c}{d},$$

ha

$$ad \lesseqgtr bc,$$

mert

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \text{és} \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Bármely két tört között végtelen sok tört van. Mivel bármely két tört egyenlő nevezőjűvé alakítható, a bizonyításnál elégséges egyenlő nevezőjű törtekre szorítkoznunk. Az $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ törtek közé végtelen sok törtet iktathatunk a következőképp:

$$\begin{gathered}
\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b} < \frac{a+2}{b} < \ldots < \frac{c-1}{b} < \frac{c}{b} \\
\frac{2a}{2b} < \frac{2a+1}{2b} < \frac{2a+2}{2b} < \ldots < \frac{2c-1}{2b} < \frac{2c}{2b} \\
\ldots \\
\frac{na}{nb} < \frac{na+1}{nb} < \frac{na+2}{nb} < \ldots < \frac{nc-1}{nb} < \frac{nc}{nb} \\
\ldots
\end{gathered}$$

Az egész és törtszámok között tehát lényeges különbség az, hogy míg két egész szám között véges számmal vannak egész számok, addig két tört között végtelen sok tört van.

Az egész és tört számokat együtt raczionális számoknak nevezzük. A raczionális számok körében a mindig végezhető műveletek az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és az egész kitevőjű hatványozás.

A (6)-ik egyenlet megoldása csak akkor adható, ha $a$ valamely $b$ számnak $n$-ik hatványa. Vannak azonban oly raczionális számok is, melyeket nem lehet másik raczionális szám hatványaként előállítani. Pl. vonjunk négyzetgyököt 2-ből. Olyan egész szám, melynek négyzete 2 volna, nincs. De talán van oly tört? Jelöljük ezt a törtet $\frac{a}{b}$-vel, a hol $a$ és $b$ egész számoknak nincs közös osztójuk és $b > 1$. Kellene tehát, hogy

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

legyen.

Ez azonban lehetetlen, mert ha $a$ és $b$ relatív prímszámok, akkor $a^2$ és $b^2$ is olyanok, miért is $\frac{a^2}{b^2}$ nem lehet egész szám. Olyan raczionális szám tehát, melynek négyzete 2, - nincs. Vagy azt kell tehát mondanunk, hogy az $x^2 = 2$ egyenletet nem tudjuk megoldani, vagy csinálnunk kell olyan számot, mely a kívánt tulajdonsággal bír. Az utóbbi utat választva, a kívánt tulajdonságú számot így jelöljük $\sqrt{2}$. Ezt a számot az az egy tulajdonsága jellemzi, hogy $(\sqrt{2})^2 = 2$. Általában véve $\sqrt[m]{a^n}$, vagy más jelölés szerint $a^{\frac{n}{m}}$, a hol $n$ és $m$ egész számok, az a szám, mely az $m$-ik hatványra emelve $a^n$-et adja,

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n.$$

Az ilyen számokat, minthogy nem lehet őket, mint két szám viszonyát felírni, viszonytalan, irraczionális (ratio= viszony) számoknak nevezzük.

Próbáljuk $\sqrt{2}$-t a raczionális számokkal nagyságra nézve összehasonlítani. Tudva azt, hogy nagyobb positív számnak négyzete is nagyobb, írhatjuk, hogy

$$\begin{array}{rlllrlrl}
1 & < \sqrt{2} & < 2 & \text{mert} & 1^2 & = 1 & 2^2 & = 4 \\
1,4 & < \sqrt{2} & < 1,5 & \text{"} & \overline{1,4}^2 & = 1,96 & \overline{1,52}^2 & = 2,25 \\
1,41 & < \sqrt{2} & < 1,42 & \text{"} & \overline{1,41}^2 & = 1,9881 & \overline{1,42}^2 & = 2,0164 \\
1,414 & < \sqrt{2} & < 1,415 & \text{"} & \overline{1,414}^2 & = 1,999396 & \overline{1,415}^2 & = 2,00225 \\
1,4142 & < \sqrt{2} & < 1,4143 & \text{"} & \overline{1,4142}^2 & = 1,99996164 & \overline{1,4143}^2 & = 2,00024449 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Íme tehát sikerült $\sqrt{2}$ értékét oly szűk határok közé szorítani, hogy ha helyette akár $1,4142$-t, akár $1,4143$-t veszünk, az elkövetett hiba kisebb, mint $0,0001$. Sőt az elkövetett hibát oly kicsivé tehetjük, a milyennek csak tenni akarjuk. Oly racionális szám azonban, mellyel $\sqrt{2}$ egyenlő volna, nincs. Jól meg kell az irracionális számokat még az ismétlődő vagy szakaszos tizedes törtektől is különböztetnünk, melyek két egész szám viszonyaként mindig felírhatók, csak nem fejezhetők ki oly tört alakjában, melynek nevezője 10-nek valamely hatványa volna. Pl.

$$0,3 = \frac{1}{3} \quad 0,142857 = \frac{1}{7}.$$

A racionális és irracionális számokat együtt valós számoknak nevezzük. A valós számok közös jellemzője, hogy nagyságra nézve bármelyik kettő közülük összehasonlítható. A valós számok körében végezhető műveletek: az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, az egész kitevőjű hatványozás és a gyökvonás bizonyos megszorításokkal. Ha (6)-ban $a$ positív, akkor a gyökvonás mindig elvégezhető, ha azonban $a$ negativ, akkor a valós számok körében $\sqrt[n]{a}$-nak csak akkor van értelme, ha $n$ páratlan. Ha $n$ ellenben páros, akkor a valós számok körében nem találunk oly számot, melynek $n$-ik hatványa $a$-t adna, mert hiszen minden (akár positív, akár negatív) valós szám páros hatványa positív.

Hogy végül a gyökvonás keresztülvihetőségét minden esetben biztosítsuk, megalkotjuk a képzetes, immaginárius számok fogalmát. Azt a számot, melynek valamely páros hatványa negatív számot ad, képzetes számnak nevezzük. Azt a számot, melynek négyzete $-1$-gyel egyenlő, $i$ betűvel jelöljük ($\sqrt{-1} = i$) és képzetes egységnek nevezzük. Más negatív szám négyzetgyöke alatt az illető szám absolut értéke négyzetgyökének és $i$-nek szorzatát akarjuk érteni. Ha pl. $a > 0$, akkor:

$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}.$$

Valamely valós és egy képzetes szám összegét komplex számnak nevezzük. A komplex számoknak két egységük van 1 és $i$.

A képzetes egységet nagyságra nézve nem tudjuk a valós számokkal összehasonlítani, tehát a komplex számokat sem. Ebben rejlik a valós és komplex számok különbsége.

Az így definiált komplex számok a valós számokkal együtt a tágabb értelemben vett komplex számok birodalmát képezik.

Még csak a zérus különös szerepéről kell megemlékeznünk. Ez sem nem positív, sem nem negatív; sem nem egész, de nem is tört; sem nem valós, nem is képzetes. Hiába adjuk valamely számhoz, vagy vonjuk le belőle, az azzal nem változik. Bármely számmal szorozva a szorzat zérus. Vele osztani nem lehet és minden positív hatványa 0. Mint hatványkitevőnek is kiváltságos szerepe van, mert minden szám zérusodik hatványa $+1$. Zérusnak logarithmusa minden számnál kisebb.

A komplex számok megalkotásával a mennyiségtan és mértan igen sok tételét általánosította és kibővítette. Igy pl. az algebra magasabb fokon kimutatja, hogy minden $n$-edfokú algebrai egyenletnek van gyöke, és legfeljebb $n$ különböző gyöke lehet, melyek közt lehetnek valósak és komplexek is. Kimutatja a mennyiségtan, hogy egy szögnek végtelen sok sinusa, cosinusa é. í. t. van, melyek közül csak egy valós, a többi pedig komplex. Hasonlóképp egy számnak nemcsak egy, hanem végtelen sok logarithmusa van é. í. t.

Két kúpszelet, ha egy síkban vannak, mindig 4 pontban metszik egymást, melyek között azonban lehetnek képzetes metszéspontok is. Tehát két kör is négy pontban metszi egymást, de a négy közül kettő mindig képzetes és a végtelen távol fekvő egyenesen van.