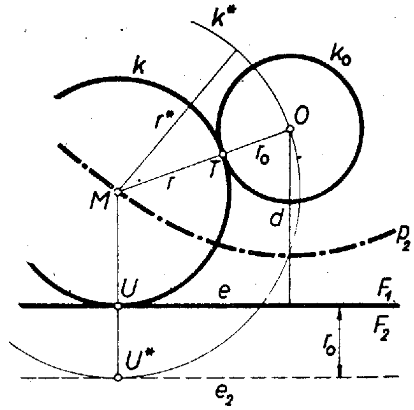
Jelöljük az adott egyenest e-vel, az adott kört k_0-lal, középpontját O-val, sugarát r_0-lal, és legyen egy a k_0-t és e-t érintő kör k, középpontja M, sugara r, érintkezési pontja k_0-lal T, e-vel U. Tekintsük az M középpont körül $MO = r^*$ sugárral írt k^* kört. Fel fogjuk használni, hogy k^* érinti az e két oldalán, tőle r_0 távolságban húzott párhuzamosok egyikét. Állításunkat e és k_0 kölcsönös helyzete, valamint k és k_0 külső vagy belső érintkezése szerint külön–külön bizonyítjuk.

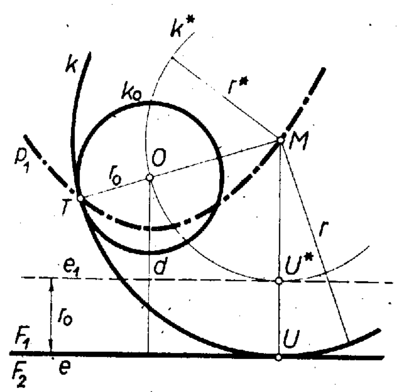
I. Legyen O-nak e-től való d távolsága nagyobb, mint r_0. Ekkor k_0 minden pontja az e-vel kettévágott sík egyik félsíkján van. Legyen ez F_1, a másik félsík pedig F_2. Az érintés miatt k csak az F_1 félsíkban lehet.



1. ábra

a) Ha k és, k_0 kívülről érintik egymást (1. ábra), akkor $r^* = MO = MT + TO = r + r_0 > r$. Így k^* átnyúlik F_2-be, az MU félegyenesen levő U^* pontja az F_2-ben van, e-től $UU^* = MU^* - MU = r^* - r = r_0$ távolságban. Ezért a k^*-ot U^*-ban érintő egyenes azonos az F_2-ben, e-től r_0 távolságban húzott e_2 párhuzamos egyenessel. Eszerint M egyenlő távolságban van O-tól és e_2 től, így csak azon p_2 parabolán lehet, melynek fókusza O, és irányvonala e_2. E parabola minden pontja F_1-en van és k_0-on kívül, mert O-nak e_2-től való távolsága $d + r_0 > 2r_0$, és a parabola csúcsa e_2-től is, O-től is fele ekkora, vagyis r_0-nál nagyobb távolságra van, márpedig a parabola pontjai közül a csúcs van legközelebb a fókuszhoz és az irányvonalhoz.

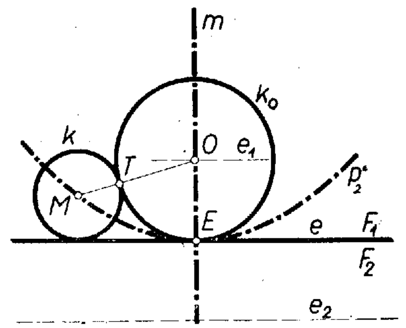
Fordítva, legyen M a p_2 egy pontja, e-n és e_2-n levő vetülete U, ill. U^*, és a MO szakasznak k_0-on levő pontja T. Így $MO = MU^*$, és $MT = MO - OT = MU^* - UU^* = MU$, ezért az M körül MT sugárral írt kör érinti k_0-t és e-t, tehát M pontja a keresett mértani helynek.



2. ábra

b) Ha viszont k és k_0 belülről érintik egymást (2. ábra), akkor k magába foglalja k_0-t, és így $r > r_0$, mert az ellentétes esetben k_0 belsejében volna e-beli pont, ti. U. Eszerint $MO = r^* = MT - OT = r - r_0$, és így k^*-nak az MU sugáron levő U^* pontja $r - r^* = r_0$ távolságra van e-től, és pedig azon a félsíkon, mint M, vagyis F_1-en. Tehát k^* az U^*-ban érinti az e-től r_0 távolságra levő e_1 egyenest. Ezekből a fentiekhez hasonlóan látjuk, hogy M azon a p_1 parabolán van, melynek fókusza M, irányvonala e_1, továbbá hogy e parabola minden pontja a mértani helyhez tartozik.

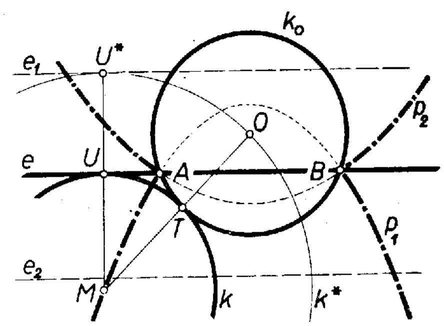
Ezek szerint, ha k_0 nem metszi e-t, akkor a keresett mértani helyet az a két parabola, p_1 és p_2 alkotja, melyek fókusza O, irányvonaluk pedig az e két oldalán r_0 távolságban húzott e_1, e_2 párhuzamos.



3. ábra

II. Ha k_0 érinti e-t E-ben (3. ábra), akkor minden az e-t E-ben érintő kör megfelelő, tehát az e-re E-ben állított m merőleges része a mértani helynek. – Ha k nem E-ben érinti k_0-t, akkor T és vele k is F_1-en van, k_0-t tartalmazó félsíkon. Továbbá E a k-n kívül van, ezért k és k_0 csak kívülről érinthetik egymást. Így **I.** *a)* meggondolásunk itt is érvényes, a mértani helyet m és p_2 alkotja, az E pont kivételével (E egybeesik p_2 csúcsával. m a p_1 parabola elfajulásának tekinthető, mert e_1 átmegy O-n.)

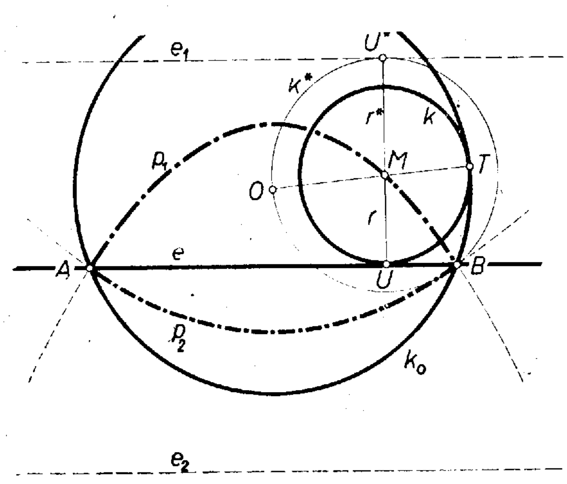
III. Ha k_0 és e metszik egymást A és B-ben, akkor k és M mindkét félsíkon lehet.



4. ábra

a) k és k_0 külső érintkezése esetén (4. ábra) $MO = r^* = r + r_0 > r$, ezért U^* a k-t nem tartalmazó félsíkon van, mindenesetre e_1 és e_2 valamelyikén, tehát M a p_1 és p_2 valamelyikének pontja. De itt p_1 és p_2-nek csak a k_0-on kívüli pontjai jönnek tekintetbe. Mivel A és B mindkét parabolán rajta van, hiszen O, e_1, e_2-től való távolságuk r_0, azért a parabolák metszik k_0-t, és így AB ívük itt nem jön tekintetbe.

Látni fogjuk viszont, hogy k és k_0 belső érintkezése esetén M számára csak p_1 és p_2-nek AB íve jön tekintetbe. Ilyenkor ugyanis k_0 magába foglalja k-t (5. ábra), mert az ellentétes esetben k-nak e mindkét oldalán volna pontja, ami lehetetlen.



5. ábra

Így M benne van k_0-ban, és $MO = r^* = TO - TM = r_0 - r$. Ekkor k^*-nak az az U^* pontja van e_1, vagy e_2-n, amelyet az MU sugár M-en túli meghosszabbítása metsz ki, mert erre $UU^* = UM + MU^* = r + (r_0 - r) = r_0$. Eszerint itt M gyanánt valóban csak a p_1 vagy p_2-n, egyszersmind k_0 belsejében levő pontok szerepelhetnek.

A fentiekhez hasonlóan lehet megmutatni, hogy A és B kivételével p_1 és p_2 minden M pontjához tartozik a követelményeknek megfelelő kör; A és B-höz 0-sugarú, csak tágabb értelemben vett kör tartozik. Ezek szerint a mértani helyet itt is p_1 és p_2 alkotja, A és B kivételével.

Marton Dénes (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)
Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldások zöme koordinátageometriai úton kapta a mértani helyet. *Bollobás Béla* (Bp., Apáczai Csere J. g.) és *Gálfi László* (Bp., I. István g.) térbeli, kúpok érintkezését felhasználó megoldást is adtak.