A MÉRTAN ALAPIGAZSÁGAIRÓL[1].

A mértan volt az a tudomány, mely az idők folyamán először alakult ki tudományos rendszerré. Euclides végezte el ezt a munkát Kr. e. 300-ban, de bizonyára az elődök gazdag és sikeres munkásságára támaszkodott.[2] Az a rendszer, melyet Euclides megalkotott és Elemek ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha$) czím alatt közrebocsátott, nemcsak a geometriának mind e mai napig el nem avult kánonja, hanem a többi tudományok is ezt választották mintaképül. Az a módszer, melyet az Elemekben elejétől végig oly szigorú következetességgel alkalmaz, a tudományos módszerek ideáljává vált. Miből áll ez a módszer?

Euclides összes törekvése oda irányult, hogy a geometria tényeit és jelenségeit, mint lánczszemeket egymásba fűzze, illetőleg egymásból leszármaztassa. E végből bizonyos alapfogalmakból indul ki, ilyenek: a pont, vonal, egyenes, felület, sík, kör, párhuzamosak stb. Ezeket meghatározza, azaz megmondja, mit ért alattuk, ilyenformán:

1. a pont az, a minek nincs semmi része;
2. a vonal a szélesség nélkül való hosszúság;
3. az egyenes oly vonal, mely valamennyi pontjához egyformán fekszik;
4. a felület az, a minek csak hosszúsága és szélessége van;
5. a sík oly felület, mely valamennyi egyeneséhez egyformán fekszik;
6. párhuzamosak azok a síkban fekvő egyenesek, melyek még akkor sem találkoznak, ha őket mindkét végükön a végtelenségig meghosszabbítjuk.

Az alapfogalmak után az alapigazságok következnek. Két csoportba osztotta őket. Az egyik csoportba tartoznak az úgynevezett *axiomák* ($\chi o\iota\nu\alpha\acute{\iota}\ \varepsilon\nu\nu o\iota\alpha\iota$):

1. ha két mennyiség mindegyike egy harmadikkal egyenlő, akkor maguk közt is egyenlők;
2. ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, az így nyert összegek is egyenlők;
3. ha egyenlőkből egyenlőket elveszünk, az így nyert maradékok is egyenlők;
4. az egész nagyobb, mint annak része;
5. az egymással egybevágó mennyiségek egyenlők.

A másik csoportban az úgynevezett *postulatumok* ($\alpha\acute{\iota}\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$) következnek.

Követeljük hogy:

1. minden pontból minden más ponthoz csak egy egyenest vonhassunk;
2. minden egyenes önmagában folytonosan meghoszabbítható legyen;
3. bármilyen középpontból bármekkora sugárral csak egy kör legyen rajzolható;
4. az összes derékszögek egymással egyenlők legyenek;
5. ha valamely egyenes két más egyenest metsz, akkor ezek kellőleg meghosszabbítva a metszőnek amaz oldalán találkozzanak, melyen a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

Ezek előrebocsátása után következnek 15 könyvben (tulajdonképen fejezetben) az ismeretes tételek és szerkesztések, melyek a mai geometriai oktatásnak is főtárgyai. A tételek bizonyításánál, a szerkesztések végrehajtásánál és új fogalmak bevezetésénél szigorúan ügyel arra, hogy *csak* a megjelölt alapfogalmakat és alapigazságokat használja fel. Így a geometria egész rendszere ama néhány alapfogalmon és alapigazságon, mint alapköveken épül fel. Ez a rendszer több, mint 2000 éven keresztül diadalmasan uralkodott az összes művelt népeknél és uralkodik mai mapig. Sőt az angolok Euclides eredeti szövegének szószerinti fordítását használják kézikönyvül.

Ennek daczára már korán emelkedtek egyes hangok, melyek Euclides rendszerét bírálni próbálták. Jók-e az alapkövek, elég szilárdak-e az egész épület hordozására, jól vannak-e kifaragva, nincsenek-e köztük feleslegesek vagy nem helyettesíthetők-e másokkal? Ezek voltak a főbb kérdések, melyek körül a vita forgott.

Minden tudományban legnehezebbek azok a kérdések, melyek annak alapjaira vonatkoznak. Hogy azokra feleletet adhassunk, ismernünk kell az összes részletkérdéseket, melyek ahhoz a szakhoz tartoznak. A jó építésznek ismernie kell azokat a köveket, téglákat, gerendákat és vastartókat, melyekből épületét megalkotandja. De még ez nem minden. Hogy az épület tervét helyesen megszerkeszthesse, ismernie kell az épület rendeltetését is. Így vagyunk a tudományokkal is; ha alapjait akarjuk lerakni, ismernünk kell a czélját is.

Mi a geometria czélja? Mi általában a tudomány czélja? Nagy és fontos kérdés, melyről sokat írtak beszéltek és vitatkoztak. A nélkül, hogy ezek fejtegetésébe bocsátkoznánk, adjunk oly feleletet, melyet tisztán a gyakorlati szempont irányít. Ezt meg is adhatjuk a nélkül, hogy ellenmondásoktól kellene félnünk. A tudomány mindenekelőtt a tapasztalati tények és gyakorlati adatok nagy halmazába rendet hoz. Teszi pedig ezt azért, hogy az emlékezetben való megtartásukat megkönnyítse. A tudományos elméletek és rendszerek oly emlékezetbeli szabályok, melyek módot nyújtanak arra, hogy a megfigyelt tények óriás zűrzavarában el bírjunk igazodni és egész tudásunkat lehetőleg kevés fejezet alá szétoszthassuk.

Mi módon lehetséges ez? Az emberi lélekben bizonyos képzetek erősebben domborodnak ki, mint mások, ezek a lélek *alapképzetei* illetőleg *alapfogalmai.* Olybá vehetők, mint a khémia atómjai, melyekből bármilyen anyag összerakható.

---

[1] *Killing:* Einführung in die Grundlagen der Geometrie, *Frischauf:* Einleitung in die absolute Geometrie, *Bolyai J.:* Az absolut tér igaz tudománya, fordította, bevezette és magyarázta Suták József.

[2] ** Lásd a K. M. -L. VI. évfolyamát.

A közönséges ember lelkében is meg vannak. Ilyenek mindenekelőtt a jó – rossz, az igaz – hamis, a szép – rút fogalmai. Mindenkinek van valami fogalma róluk.

A felhozott példa egyszersmind azt is mutatja, hogy az alapfogalmakkal bizonyos alaptételek elválaszthatatlanul össze vannak kapcsolva. Így mindenekelőtt a következő: a jó kívánatos, a rossz kerülendő stb. Az ilyen fajta tételeket *alapigazságoknak* szokás hívni. Az egyszerű ember lelkében az alapfogalmak és alapigazságok bizonyos rendszert alkotnak, mely minden cselekedetét szabályozza és a melybe minden újabb lelki szerzeményét besorozza.

Egészen hasonló módon alakulnak, ki a tudomány alapfogalmai és alapigazságai. A hosszú tapasztalat az emberek lelkében kidomborította a pont, az egyenes, a felület, a sík, a párhuzamos egyenesek fogalmát. Eleinte bizonyára nagyon határozatlanok és elmosódottak voltak. Lassú és hosszú fejlődés révén jutott el az emberiség oda, míg Euclides a tér egyszerű alapfogalmait rendszerbe foglalhatta és névvel láthatta el. És erre szükség is volt, mert többféle szó volt forgalomban. Épp azért kénytelen volt definiálni. De bizonyára érezte, hogy ez csak névleges definíczió, mely a fogalmat nem meríti ki; mégis összeállította azokat, hogy tanítványai és olvasói előtt szótár gyanánt szolgáljanak, mely megmutassa, mely fogalomra, mely szó használandó.

Lehet-e alapfogalmakat definiálni? Lehet-e megmondani mi a jó, mi az igaz, mi a szép? Bizonyára mindenkinek lelkében van valami ezekről a fogalmakról, bizonyára nagyjából egyeznek is azok. De csak nagyjából, a részletekben nem. Hasonlóképpen vagyunk a pont, vonal, sík stb. fogalmával. Körülbelül megmondhatjuk, mit értsünk alatta, de pontosan nem. Azok, kik Euclides művét bírálgatni próbálták, mindenekelőtt az alapfogalmak definíczióit próbálták megváltoztatni. Ily módon a definícziók egész sorozata keletkezett, melyekből az egyenes vonalról szólókat közöljük. A legközönségesebb: az egyenes két pont között a legrövidebb út. Továbbá: az egyenes oly határtalan vagy végtelen homogén vonal, melyet két elegendő közel fekvő pontja teljesen meghatároz. Leibnitz szerint az egyenes oly vonal, melynek összes pontjai ugyanazon helyen maradnak már akkor, ha annak csak két pontját rögzítjük, bárhogyan forgassuk is az egyenes körül fekvő tér pontjait, melyeket az egyenes pontjaival összekötve gondolunk. Archimedes szerint: az egyenes a síkot két oly részre osztja, melveket csak kölcsönös helyzetük különböztet meg egymástól.

Eme definícziók közül melyiket válasszuk? Melyik felel meg teljesen ama fogalomnak, mely lelkünkben az "egyenes"-ről kialakult? Érezzük, hogy mindegyik bizonyos mértékben, de egyik sem teljesen. Legjobb tehát, ha a definíczióknak nagy jelentőséget nem tulajdonítunk. Igenis szükséges definiálgatni ott, hol új fogalom beviteléről van szó, ott a hol azt az új fogalmat az olvasóval meg akarjuk ismertetni, ott a hol ezt a régi fogalmakkal össze akarjuk kapcsolni.

De másrészt az is világos, hogy az a fogalom, melyet definiálunk, nem lehet alapfogalom, mert más fogalmakból rakjuk össze. Akárhogyan definiálgassunk ide-oda, végre is a lánczolat végén oly fogalmakhoz kell jutnunk, melyeket tovább szétbontani nem lehet. Minden tudományos rendszerben rá kell jutnunk bizonyos alapfogalmakra, melyeken az egész tudományt felépíthetjük ugyan, de a melyek maguk semmiféle más fogalmakból össze nem rakhatók.

Az azonban egészen más kérdés, hogy alapfogalom-rendszerünk elegendő-e a geometria összes alakzatainak megszerkesztéséhez, nincs-e közöttük felesleges? Azon is lehet elmélkedni, nem képzelhető-e az alapfogalmaknak egészen más csoportja, melyekből a geometria éppúgy megszerkeszthető legyen, mint Euclidesé?

Hogy erről elmélkedhessünk, előbb az alapigazságok természetére kell rátérnünk. A mint láttuk, Euclides két csoportba osztotta őket. Van-e valami különbség az axiomák és a postulatumok között? E fölött is sokat vitatkoztak, Aristoteles azt mondta: a postulatumot szükséges volna bebizonyítani, ha valahogyan tudnók, ellenben az axioma olyan igazság, melyet mindenki elismer. Ez a megkülönböztetés azonban nem helyes. Mert mit jelent bizonyítani? Oly tételeket felállítani, melyekből a tapasztalati jelenségek egész sorozata, mint szükségszerű folyomány következzék. Ez utóbbi kifejezést pedig úgy értsük, hogy gondolkodásmódunkban van bizonyos kényszer, mely az egyik gondolathoz a legtöbb emberben ugyanazt a másik gondolatot kapcsolja. Ennek a folyamatnak az alapja szintén a tapasztalat, lelkünk mivoltának, gondolkodásmódunknak a megfigyelése. Azok a tételek, melyekből a geometria összes tapasztalati tényei, mint szükségszerű következmények levezethetők, a geometria *alapigazságai.*

Észrevesszük, hogy Euclides axiornáiban nincs semmi olyan elem, mely csakis a térre vonatkoznék. Ezek tehát a térről nem mondanak semmi különös igazságot. Éppannyira igazak a fizika, khémia, számtan stb. terén, a mennyire igazak a geometriában. Ha tehát a térről semmi különös igazságot nem mondanak, úgy pusztán belőlük a tér igazságai le sem vezethetők. Szükségünk van a térről szóló alapigazságokra is. Ezeket adják a postulatumok. A két fajta alapigazság között tehát csak az a különbség, hogy míg az axiomák az összes mennyiségtudományoknak alapigazságai, addig a postulatumok csak a geometriáéi, vagy – ha úgy tetszik – térszemléletünké.

Hogyan jutott rájuk Euclides? Bizonyára nem önmaga, bizonyára felhasználta elődeinek munkásságát is. A hosszú megfigyelő és kísérletező tapasztalat hozta őket létre. Lehet, hogy egyiket–másikat (különösen a postulatumokat) Euclides formulázta meg először, de bizonyos, hogy nem az ő lelkében alakultak ki először. A pontos méréseknek egész sorozata kellett, ahhoz, míg az emberek rájutottak arra, hogy ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, egyenlőket kapunk. Sokszor halljuk és sokan tanítják, hogy ez az igazság, valamint a többi axioma, olyan, melyet minden ember rögtön belát. De bizony ez nincs így és kivált régente nem volt így. Most már, évezredes múlt után oly erős lelkünkben a kapcsolatbeli kényszer, hogy a tétel igazságát rögtön elismerjük, de akkor az emberek még kevés tapasztalattal rendelkeztek ahhoz, hogy általános érvényességét belássák. De még mai nap is bárki elég esetet hozhat fel, a hol ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, nem kapunk egyenlőket. Az eltérést persze mai nap számba tudjuk venni és az elektromosságnak, hőmérsékletnek vagy más erőnek tulajdonítjuk.

Bizonyosnak állíthatjuk azt is, hogy az axiomák jóval előbb alakultak ki, mint a postulatumok. Már eme oknál fogva is – hogy úgy mondjuk – igazabbaknak tartották őket. Az axiomák voltak ama kornak a természettudományi alapigazságai. És mert sokféle jelenségnél lépten-nyomon szerepeltek, azért mondhatta Aristoteles, hogy igazságukat mindenki szívesen elismeri.

Egészen másképp történt a postulatumokkal. Ezek elfogadása nehezen ment, részben azért, mert aránylag újak voltak, részben azért, mert a geometria szűk körére szorítkoztak, melyben kevés embernek volt elegendő tapasztalata. Különösen áll ez az 5. postulátumról, melyet téves leírás folytán Euclides 11. axiomájának is mondanak. Ha két egyenest egy harmadik metsz, akkor a két egyenes azon az oldalon találkozik, a melyiken a belső szögek összege kisebb két derékszögnél. Ez a tétel volt a mathematika úgynevezett "foltja", melynek természetéről 2000 év óta elmélkedtek.

Euclides csak egyszer használja a bizonyításnál, nevezetesen az I. könyv 29. tételénél, mely így szól: "ha két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz, akkor a váltószögek egyenlők egymással, a megfelelő szögek is egyenlők és a kiegészítőszögek (ellenszögek) két derékszöget adnak". Ez a tétel a geometria legfontosabb tételeinek egyike, mert ezen alapszik az idomok szögeinek összegére vonatkozó tétel, Pythagoras tétele, a hasonló háromszögekre vonatkozó tételek, az egész trigonometria, és a térmértan legnagyobb része.

Euclidesnek csak azért volt szüksége az 5. postulatumra, hogy a 29. tételt, mint a geometria alapvető tételét, bebizonyítsa. Minthogy pedig ez utóbbi a párhuzamos egyenesek fogalmával függ össze, azért az összes kérdéseket, melyek az 5. postulátummal kapcsolatban vannak *"a párhuzamosok elmélete"* czím alatt foglalták össze és az 5. postulátumot a *párhuzamosok axiomájá*-nak hívták.

Már a régi görög geometrák (Ptolemeus, Proclus) foglalkoztak e kérdéssel. Azt látták, hogy a 29. tétel és annak következményei a tapasztalattal egyeznek, nem mondhatták tehát azt, hogy az 5. postulátum hamis, hanem főtörekvésük az volt: megmutatni, hogy a 29. tétel másképp is bebizonyítható. E bizonyítások lényege abban állott, hogy az 5. postulátum helyett újabb alapigazságot voltak kénytelenek használni. Ilyen értelemben folyt a kutatás egészen a legújabb időkig.

Ilyen alapigazságok, melyek a párhuzamosok axiomáját helyettesíthetik, mert segítségükkel Euclides 29. tétele bebizonyítható; a következők lehetnek:

1. A háromszög szögeinek összege két derékszög.
2. Két háromszög már akkor hasonló, ha az egyiknek két szöge egyenlő a másiknak két szögével.
3. A félkörbe írt kerületi szög, derékszög.
4. Ha két egymást metsző egyenesre merőlegeseket állítunk, akkor ezek is metszik egymást.
5. Az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül csak egy oly egyenes húzható, mely az adottal párhuzamos.
6. A szögmezőn belül fekvő minden ponton keresztül mindig lehet egy egyenest húzni, a mely mindkét szárt metszi.

Ez az igazság szorosan összefügg a megelőzővel. Ki lehet továbbá mutatni, hogy ha ezt elfogadjuk axiomául, akkor minden további feltevés nélkül következik, hogy nemcsak egy, de végtelen sok oly egyenes húzható, melyek az adott két egyenest metszik. Az axiomának ilyetén való fogalmazása azt is nyilvánvalóvá teszi, hogy miben fekszik ennek az egész kérdésnek a lényege. Mert képzeljünk oly szögmezőt, melyet két egyenes határol; minden a térszemléletben jártas ember rögtön elismeri, hogy a rajzolt szögmezőn belül fekvő minden ponton keresztül lehet oly egyenest húzni, mely az adottakat metszi. Az alapigazságot tehát a szemlélet adja. De ha most fogalmainkat a határértékig visszük, vagyis ha a választott pontot sok millió mértföld távolságban gondoljuk: akkor a tapasztalat semminemű felvilágosítást sem adhat arra nézve, hogy a ponton keresztül menő egyenes metszi-e az adottakat. Nem, adhat egyszerűen azért, mert ekkora szögmezőket a valóságban nem lehet létesíteni.

A felsoroltakhoz még egy sereg hasonló tételt lehetne csatolni, melyek mindnyájan alkalmasok volnának arra, hogy Euclides 5. postulatumát helyettesítsék. Egyik sem lényegesen jobb, mint Euclidesé.

Mások ismét a párhuzamosok elméletét az *irány* fogalmával vélik elintézettnek. Ezek abból a definiczióból indulnak ki, hogy az egyenest a kezdő pontja és az iránya határozza meg. Két egyenes, melyeknek különböző a kezdő pontjuk, de ugyanaz az irányuk, párhuzamosak. Az irányt a szög méri, tehát az a két szög egyenlő, melyet két párhuzamos egyenes ugyanama harmadik egyenessel bezár. Ez Euclides 29. tétele. Ennek az eljárásnak meg az a hibája, hogy új alapfogalomnak: az *iránynak* felvételét teszi szükségessé.

Ehhez hasonló Thibaut eljárása, melyről egykor azt hitték, hogy a párhuzamosok elméletét örökre elintézte. Thibaut minden külön feltevés nélkül, önállóan be akarja bizonyítani, hogy a háromszögek szögeinek összege két derékszög; világos dolog, hogyha ez sikerül, akkor belőle következik a 29. tétel és így az egész Euclides-féle geometria. Thibaut szerint a szög fogalmából minden további feltevés nélkül az is következik, hogy a forgó egyenes,akkor is 4 derékszöget ír le (vagy annak többszörösét), ha nem ugyanama, de egymásután különböző pontok körül forog és így tér vissza eredeti helyzetébe. Ebből a mint azt mindenki beláthatja, következik az egyirányú külszögekre vonatkozó ismeretes tétel és ebből a háromszög szögeinek összegére szóló tétel. Azonban semmiféle jogunk sincs azt mondani, hogy az egyenes akkor is 4 derékszöget ír le, ha egymásután különböző pontok körül forogva tér vissza eredeti helyzetébe. A véges térre vonatkozó tapasztalat ugyan igazat ád e tételnek, de ki biztosít arról, hogy akkor is igaz marad, ha a háromszög csúcsai sok millió mértföldnyire vannak egymástól.

Lényegesen új adattal járult az elmélethez Legendre, mikor Euclides többi alapigazságaiból kifolyólag kimutatja, hogy a háromszög szögeinek összege nem lehet nagyobb két derékszögnél, a miból azután következik, hogy ha két egyenesnek egy harmadikkal alkotott belső szögei együttvéve két derékszöggel egyenlők, akkor azok nem metszhetik egymást, mert különben létrejönne oly háromszög, melyben két szög már is két derékszöget ád, s így a három szög összege ennél nagyobb volna. De már azt, hogy a két egyenes, csakis ebben az egy esetben nem metszi egymást, külön axioma nélkül lehetetlen volt bebizonyítani.

Sokan fogják immár kérdezni: mire való ez a sok elmélkedés, hiszen abból indultunk ki, hogy a geometria tapasztalati tudomány – és senki sem kételkedik, hogy csakugyan az – hát akkor nem-e a tapasztalat a legbiztosabb próbaköve? Ez az ellenvetés igaz és jogosult. Valóban tudományos elméleteinknek egyetlen biztos próbaköve a tapasztalat. Semmi egyebet nem várunk tőlük, csak azt az egyet, hogy a tapasztalattal egyező eredményt adjanak. Még azt sem kérdezzük, hogy maga az alapigazság, csakugyan igazság-e, sem azt, hogy az alapfogalmak a nagy mindenségben csakugyan úgy vannak-e meg, a hogy mi azokat felfogjuk. Lehet, hogy csak képek, megállapodásszerű fikcziók, lehet, hogy a valóval csak olyan viszonyban vannak, mint a kép azzal a tárggyal, melyet ábrázol. Ez mind meglehet, de azt az egyet föltétlenül megköveteljük, hogy összes következményeik a valóval megegyezésben legyenek. Ily felfogásban azután a párhuzamosok kérdése csakugyan hamar eldönthető. Mérjük meg például, hogy valamely háromszög szögeinek összege mennyi? Ha 180 fok, akkor Euclides 5. postulátuma helyes és az egész Euclides-féle geometria szilárd alapon áll; ha nem, akkor az 5. axioma elvetendő és a geometria új alapokra fektetendő.

Elvileg ez igen egyszerű, de a gyakorlatban lehetetlen. Minden mérés hibával jár; szemünk sem tökéletes, a messzelátó se az, a szögmérő kör se az. Ebbe már bele kell nyugodnunk. Valóban csoda számba mehet, ha egy háromszög szögeit pontosan lemérve és összegezve 180 fokot kapunk. Eltérés majd nem mindig volt és lesz is; nagyon kicsiny ugyan, de mégis mindig meg van. Már most minek tulajdonítsuk? A mérés fogyatékos voltának, vagy pedig annak, hogy a háromszög szögeinek összege nem 180 fok?

De még ha csak ez a baj volna! E miatt egész bátran állíthatnók, hogy a háromszög szögeinek összege csakugyan 180 fok. Minden tudományunk úgyis csak közelítő (a mathematika is), a teljes igazságot csak bizonyos perczentszámig bírjuk megközelíteni. Így ebbe egészen jól belenyugodhatnánk, és azzal a pár másodperczczel, mely hibázik vagy felesleges nem is törődnénk. De a nagy baj ott van, hogy nem tudjuk, vajjon más esetben nem-e nagyobb a hiba. Hiszen a mi vizsgaszemünk elhat a csillagos ég legelrejtettebb zugáig, hiszen mi a mi háromszögeinket a Föld, a Nap és a Sirius közt is felépítjük! Geometriai fogalmainkat és tételeinket kiterjesztjük a végtelenségig. Mi az az egyenes vonal, mely a Föld egy pontjától a Nap egy pontjáig terjed? El sem tudjuk képzelni, hogyan lehetne azt kitűzni. Már egy 100 méteres egyenesnek pontos kitűzése mennyi bajjal jár és mennyi hibát tesz lehetővé. Valóban a közvetlen tapasztalat alapján lehetetlen megmondani, hogy a mi térbeli alakzatainkkal mi történik, ha nagyságuk bizonyos határon túl nő. Ennek a mi tudományunknak az a feltevés az alapja, hogy azok a tételek, a melyek itt a tapasztalati térben igazak, azok ott a végtelen térben is igazak. Erre a feltevésre szükség is van. Ez ád szárnyat a tudománynak, hogy a tapasztalat rögétől megszabadulva, magasabbra szállhasson. E tekintetben a geometria sem nem rosszabb, sem nem jobb bármely más tapasztalati tudománynál.

Tapasztalati alapon tehát nem lehet eldönteni, hogy az 5. postulátum vagy valamelyik következménye a valóval megegyezik-e, vagy sem. Nincs tehát más hátra, mint a kérdést nyílt kérdésnek tekinteni. Miért ne lehessen oly geometriát alkotni, melyben az 5. postulatum nem szerepel?

Így okoskodott Bolyai János és megalkotta a maga geometriáját, melyben az 5. postulatumot nem használja. Ebben a geometriában tehát az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül több oly egyenes húzható, mely az adottat nem metszi; a háromszög szögeinek összege nem két derékszög stb. Megmutatja azt is, hogy minden gyakorlati feladat (háromszögmegoldások, trigonometria) az ő geometriájában éppúgy megoldható, mint Euclidesében. Minden megoldásnak meg van a maga kétségtelen egyetlen értelme. Az egész geometria összes tételei önmagukkal harmoniában, vannak. Ellenmondásról szó sincs. Ez a geometria tehát ép oly reálisnak veendő, mint Euclidesé, és ilyennek tekintendők azok is, melyeket Klein, Clifford, Riemann és Lobatschewski alkottak. Ezek a geometriák a véges tapasztalati térben megegyezésbe hozhatók egymással, a tapasztalatunkon kívül eső térre pedig különböző ugyan, de ellenmondásra nem vezető eredményeket adnak.

Ezekben a geometriákban az alapfogalmak is némi csekély módosulást szenvednek a szerint, hogy melyikhez tartoznak. Így az egyenest gondolhatjuk végtelennek vagy csak határtalan nagy, önmagába visszatérő vonalnak. Az utóbbi esetben ismét kétféle lehet: 1. olyan, hogy két egymást metsző egyenes még egy pontban metszi egymást, miként a gömb két főköre; 2. olyan, hogy a metszés után visszatérnek a nélkül, hogy többször metszenék egymást, mint pl. a ∞ alak.