Megmutatjuk, hogy ha s, d, p, q valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni négy tagja, akkor s és d között nem állhat sem egy, sem két tag, másrészt hogy p és q között nem állhat két tag.

Tegyük fel, hogy s és d között egy tagja van a sorozatnak. Ez vagy p, vagy q, mindenesetre egyenlő $s = u + v$ és $d = u - v$ számtani közepével, u-val. Ha a közbülső tag p, vagyis $p = uv = u$, ebből $u(v-1) = 0$, tehát az α) $u = 0$ és β) $v = 1$ egyenlőségeknek legalább egyike teljesül. Az α) esetben $p = uv = 0$, $q = u/v = 0$, a sorozatban két egyenlő tag lép fel, így a sorozat különbsége 0, tehát $s = d$ is fennáll. Márpedig $u + v = u - v$-ből $v = 0$, és így q-nak nincs értelme. – A β) esetben hasonlóan $p = q (= u)$-ból $s = d$ adódik. – Ugyanezekre az eredményekre vezet az a feltevés is, hogy s és d között q áll, vagyis hogy $u/v = u$.

Ha pedig s és d mindegyike szélső, vagy ha mindegyikük közbülső tagja a sorozatnak, akkor $p + q = s + d$. (Ha ugyanis a_1, a_2, a_3, a_4 egy D különbségű számtani sorozat egymás utáni négy tagja, akkor $a_1+a_4 = a_2+a_3 = 2a_1+3D$.) Ebből

$$p + q - (s + d) = uv + \frac{u}{v} - 2u = \frac{u}{v} - 2u = \frac{u}{v}(v^2 - 2v + 1) = \frac{u}{v}(v-1)^2 = 0,$$

tehát ez a feltevés is a fenti ellentmondásba torkollik. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ha mármost $d = u - v$ és $s = u + v$ a sorozat szomszédos tagjai, akkor a sorozat D különbségére vagy $D = 2v$, vagy $D = -2v$. És mivel p és q vagy d és s utáni tagjai a sorozatnak, vagy mindegyikük megelőzi s és d-t, azért p és q valamilyen sorrendben vagy az $u + 3v$, $u + 5v$, vagy az $u - 3v$, $u - 5v$ számpárok tagjaival egyenlők. Ez $2 \cdot 2 = 4$ egyenletrendszerre vezet. A

$$p = uv = u + 3v \qquad\qquad q = \frac{u}{v} = u + 5v$$

rendszerből

$$u = \frac{3v}{v-1} = \frac{5v}{\dfrac{1}{v} - 1},$$

és mivel $v \neq 0$, és a fentiek szerint $v \neq 1$, azért $v = -3/5$, $u = 9/8$. Az ezekből képezett (1)

$$d = u - v = \frac{69}{40}, \quad s = u + v = \frac{21}{40}, \quad p = uv = -\frac{27}{40}, \quad q = \frac{u}{v} = -\frac{15}{8} = -\frac{75}{40}$$

számok valóban számtani sorozatot alkotnak.

A hátralevő három egyenletrendszer megoldásának megkönnyítése végett oldjuk meg közös típusukat, az

$$uv = u + Av, \qquad \frac{u}{v} = u + Bv$$

paraméteres egyenletrendszert. Ugyanis ebben $(A,\ B)$ helyére egymás után a $(+5,\ +3)$, a $(-3,\ -5)$ és a $(-5,\ -3)$ értékpárokat írva a további egyenletrendszereket kapjuk, a $(+3,\ +5)$ értékpárral pedig a már megoldott esetet kapnánk. Ahhoz hasonlóan

$$u = \frac{Av}{v-1} = \frac{Bv}{\dfrac{1}{v} - 1} = -\frac{Bv^2}{v-1}\text{-ből}$$

$$v = -\frac{A}{B}, \qquad\qquad u = \frac{A^2}{A+B},$$

és rendre a következő sorozatokat kapjuk:

(II) $\quad u = \dfrac{25}{8},\ v = -\dfrac{5}{3}$-ból $d,\ s,\ q,\ p = \dfrac{115}{24},\ \dfrac{35}{24},\ -\dfrac{45}{24},\ -\dfrac{125}{24}$;

(III) $\quad u = -\dfrac{9}{8},\ v = -\dfrac{3}{5}$-ből $,q,\ p,\ d,\ s = \dfrac{75}{40},\ \dfrac{27}{40},\ -\dfrac{21}{40},\ -\dfrac{69}{40}$;

(IV) $\quad u = -\dfrac{25}{8},\ v = -\dfrac{5}{3}$-ból $p,\ q,\ d,\ s = \dfrac{125}{24},\ \dfrac{45}{24},\ -\dfrac{35}{24},\ -\dfrac{115}{24}$.

Fritsch István (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az I, III és a II, IV megoldás–pár (-1)-gyel való szorzással és a sorrend megfordításával egymásba megy át. A numerikus számítás végrehajtása nélkül is belátható, hogy ha az u, v számpárból képezett s, d, p, q valamilyen sorrendben véve számtani sorozatot ad, akkor a $-u$, v számpárból képezett d', s', p', q' számok a megfelelő sorrendben ugyancsak számtani sorozat tagjai. Ezek ugyanis amazokból (-1)-gyel való szorzással keletkeznek, pl. $d' = -u - v = -(u + v) = -s$, márpedig egy számtani sorozat tagjait (-1)-gyel szorozva ismét számtani sorozatot kapunk.

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. III. o. t)