Értsük az $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ jel alatt az $(a_1b_2 - a_2b_1)$ különbséget. Az itt fölírt *determinánsnak* két *sora* és két *oszlopa*, és összesen 2^2 *eleme* van.

Definíczió: Ha valamely determinánsnak n sora és n oszlopa, tehát n^2 eleme van, akkor azt n-edrendű determinánsnak nevezzük. Hogy miként határozható meg valamely n-edrendű determináns értéke, arról későbben fogunk szólni.

A felírt másodrendű determinánst megvizsgálva, a következő tételekhez jutunk:

1°. A másodrendű determináns értéke nem változik, ha sorait oszlopaival ugyanolyan rendben felcseréljük. Ugyanis:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

2°. A másodrendű determináns előjele megváltozik, ha két sorát egymással felcseréljük. Ugyanis:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3°. A másodrendű determináns értéke 0, ha két sora egyenlő.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

4°. A másodrendű determináns értéke 0, ha valamelyik sorának minden eleme 0. Pl.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - 0 \cdot c = 0.$$

5°.

$$\begin{vmatrix} (a_1 + a_1' & (b_1 + b_1') \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + a_1')b_2 - a_2(b_1 + b_1') =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1'b_2 - a_2b_1') = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Vagyis: Két determináns összege, ha ezek csak egy-egy megfelelő sor elemeiben különbözők, ismét determináns alakjában állítható elő.

6°.

$$\begin{vmatrix} a_1c & b_1c \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c - a_2b_1c = c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Vagyis: A másodrendű determinánst úgy szorozzunk valamely számmal, hogy valamelyik sorának minden egyes elemét megszorozzuk vele.

Megjegyezzük, hogy az itt levezetett tételek az oszlopokra is érvényesek az 1°. tétel értelmében.

A harmadrendű determináns értékének kiszámítására nézve megállapodunk abban, hogy:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1,$$

a hol

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Az A_1, B_1, C_1 másodrendű determinánsok, melyeket igen könnyen előállíthatunk. A_1-et ugyanis úgy képezzük, hogy az a_1 elemet tartalmazó sort és oszlopot kitöröljük. Tehát:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ugyanez a szabály érvényes B_1 és C_1-re nézve is.

Általában az n-edrendű determináns kiszámítását $(n-1)$-edrendű determináns kiszámítísára vezetjük vissza. Tehát pl.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1 - d_1D_1,$$

a hol pl.

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \text{ stb.}$$

A 3-ad, 4-ed stb. rendű determinánsokra is kimutathatjuk $1-5$-ig felírt tételeink helyességét, ha a számításokat végrehajtjuk.

Lássuk már most a determinánsok alkalmazását egyenletrendszerek megoldásánál. Legyen megadva pl. a következő egyenletrendszer:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = e_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = e_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = e_3$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4u = e_4$$

Ha pl. x-et akarjuk kiszámítani, akkor írjuk fel a következő determinánst:

$$D = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u - e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u - e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u - e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4u - e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ezen determináns értéke 0, mert hiszen első oszlopának minden egyes eleme 0. Most az 5-ik tétel alapján e determináns szétbontható, úgy hogy nyerjük:

$$D = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+u\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

A 2., 3. és 4. determináns értéke 0, mert mindegyikében van két-két egyenlő oszlop, tehát

$$+x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

miből

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{D} = \frac{D_1}{D}.$$

Az x nevezőjében előforduló determináns az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból van összetéve és az egyenletrendszer determinánsának (D) neveztetik.

Az y kiszámításánál

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1y + c_1z + d_1u - e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & \dots & & \dots\dots \\ a_3 & \dots & & \dots\dots \\ a_4 & \dots & & \dots\dots \end{vmatrix} = 0$$

determinánsból indulunk ki és akkor nyerjük, hogy :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{D} = \frac{D_2}{D}.$$

Épp így számíthatjuk ki a z és u értéket is. Egybevetve a nyert eredményeket, nyerjük a következő szabályt:

Az ismeretlen értéke tört alakjában állítható elő, melynek nevezője az egyenletrendszer determinánsa, számlálója pedig oly determináns, melyet az egyenletrendszer determinánsából úgy kapunk, hogy a kérdéses ismeretlen együtthatói helyébe a jobb oldalon álló ismeretes tagokat tesszük.

Ha D nem 0, akkor $x,\ y,\ z,\ u$ stb. ismeretleneknek bizonyos meghatározott értékük van, melyek mint a helyettesítés megmutatná, csakugyan megfelelnek az egyenletrendszernek. Ez a közönséges eset, midőn az egyenletrendszernek csak egy megoldása van.

Ha $D = 0$ és a számlálók egyike nem 0, ellenmondásba jutunk és egyenletrendszernek nincs megoldása; ha pedig a számlálók mindegyike 0, akkor $\frac{0}{0}$ alakra jutunk, tehát az egyenletrendszer határozatlan.

Lássuk most, hogy mi történik akkor, ha az egyenletrendszer homogén, vagyis ha $e_1 = e_2 = \ldots = 0$. Ilyenkor a

$$Dx = D_1$$

$$Dy = D_2$$

$$\ldots$$

egyenletek mindegyikében: $D_1 = D_2 = \ldots = 0$, mert hiszen egy-egy oszlop minden egyes eleme 0. Tehát

$$Dx = 0, Dy = 0 \ \ldots$$

Ha az ismeretlenek mindegyike 0, akkor ez az értékrendszer csakugyan kielégíti az egyenletrendszert, ha azonban az ismeretleneknek csak egyike is különbözik 0-tól, akkor kell hogy $D = 0$ legyen. Tehát:

Ha valamely homogén lineáris egyenletrendszernek nullától különböző megoldása van, akkor ennek szükséges feltétele, hogy az egyenletrendszer determinánsa egyenlő legyen 0-val.

Az eddig tanultak alapján igen egyszerű megoldása adható a **978**-ik feladatnak.

A Mollveide-féle tételek alapján ugyanis, ha valamely háromszög oldalai $a,\ b,\ c$ és szögei $A,\ B,\ C$:

$$(b+c) : a = \cos\frac{B-C}{2} : \sin\frac{A}{2}.$$

Innen pedig :

$$-a\cdot\cos\frac{B-C}{2} + b\cdot\sin\frac{A}{2} + c\cdot\sin\frac{A}{2} = 0$$

és épp így

$$a\cdot\sin\frac{B}{2} - b\cdot\cos\frac{C-A}{2} + c\cdot\sin\frac{B}{2} = 0$$

(1)
$$a\cdot\sin\frac{C}{2} + b\cdot\sin\frac{C}{2} - c\cdot\cos\frac{A-B}{2} = 0.$$

Másrészt ugyancsak a Mollveide-féle tétel értelmében:

$$(b-c) : a = \sin\frac{B-C}{2} : \cos\frac{A}{2}$$

vagy

$$a\cdot\sin\frac{B-C}{2} - b\cdot\cos\frac{A}{2} + c\cdot\cos\frac{A}{2} = 0$$

és épp így

$$a\cdot\cos\frac{B}{2} + b\cdot\sin\frac{C-A}{2} - c\cdot\cos\frac{B}{2} = 0$$

(2)
$$-a\cdot\cos\frac{C}{2} + b\cdot\cos\frac{C}{2} + c\cdot\sin\frac{A-B}{2} = 0.$$

Ha az (1) és (2) egyenletrendszerekben a-t, b-t és c-t ismeretleneknek tekintem, akkor oly két homogén lineáris egyenletrendszerem van, melyekben az ismeretleneknek van 0-tól különböző megoldásuk, mivel egy háromszög oldalainak mérőszámai 0-tól különbözők. Kell tehát, hogy az egyenletrendszerek determinánsai 0-val egyenlők legyenek, tehát kell hogy legyen:

$$\begin{vmatrix} -\cos\frac{B-C}{2} & \sin\frac{A}{2} & \sin\frac{A}{2} \\ \sin\frac{B}{2} & -\cos\frac{C-A}{2} & \sin\frac{B}{2} \\ \sin\frac{C}{2} & \sin\frac{C}{2} & -\cos\frac{A-B}{2} \end{vmatrix} = 0$$

és

$$\begin{vmatrix} \sin\dfrac{B-C}{2} & -cos\dfrac{A}{2} & \cos\dfrac{A}{2} \\ \cos\dfrac{B}{2} & \sin\dfrac{C-A}{2} & -\cos\dfrac{B}{2} \\ -\cos\dfrac{C}{2} & \cos\dfrac{C}{2} & \sin\dfrac{A-B}{2} \end{vmatrix} = 0$$