Valamely polynom $n$-dik hatványa könnyen meghatározható, ha ismerjük a binomiális tételt. Ugyanis:

$$(a+x)^2 = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^n - 1 + \ldots + \binom{n}{\alpha}a^a x^{n-\alpha} + \ldots + \binom{n}{n}a^n = \Sigma\binom{n}{\alpha}a^\alpha x^{n-a},$$

vagy még:

$$(a+x)^n = \Sigma\frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}a^a x^{n-a}.$$

Ha most $x$ helyébe $(b+c)$-t teszünk és tekintetbe vesszük, hogy

$$x^{n-\alpha} = (b+c)^{n-\alpha} = \Sigma\frac{(n-\alpha)!}{\beta![(n-\alpha)-\beta]!}b^\beta c^{(n-\alpha)-\beta},$$

akkor

$$(a+b+c)^n = \Sigma\frac{n!}{\alpha!\beta!(n-\alpha-\beta)!}a^\alpha b^\beta c^{(n-\alpha)-\beta}.$$

Tegyük fel, hogy az itt talált törvényszerűség $p$ tag esetén igaz, tehát hogy

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{p-1}+x)^n =$$

$$= \Sigma\frac{n!}{a!a_2!\ldots a_{p-1}![n-a_1-a_2-\ldots-a_{p-1}]!}\cdot a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots x^{n-\alpha_1-\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}$$

és tegyük $x$ helyébe $(a_p+a_{p+1})$-et; akkor tekintetbe véve, hogy

$$x^{n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1})} = (a_p+a_{p+1})^{n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1})} =$$

$$= \Sigma\frac{[n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1})]!}{a_p![n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}+a_p)]!}a_p^{\alpha_p}a_{p+1}^{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots\alpha_p}$$

kapjuk, hogy

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p+a_{p+1})^n =$$

$$= \Sigma\frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_p![n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p)]!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_p^{\alpha_p}a_{p+1}^{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots\alpha_p}.$$

Ha tehát a tétel $p$ összeadandó esetén érvényes, akkor igaz $p+1$ esetén is. Ámde $p=2$ esetén igaz volt, helyes tehát akkor is, ha $p=3$, $p=4$ és í. t. s így helyes minden esetben.

Általában tehát:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_p)^n =$$

$$= \Sigma\frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_{p-1}![n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1})]}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_{p-1}^{\alpha_p-1}a_p^{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots\alpha_{p+1}}$$

ha pedig

$$n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots\alpha_{p-1} = a_p$$

teszünk; akkor a polynomiális képlet végső alakja:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_p)^n = \Sigma\frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_p!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_p^{\alpha_p},$$

ahol $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p$ pozitiv egész számok, vagy 0 és

$$a_1+a_2+\ldots+a_p = n.$$

Legyen pl. kifejtendő $(a+b+c)^4$, akkor:

$$(a+b+c)^4 = \Sigma\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}a^\alpha b^\beta c^\gamma \quad \text{és} \quad \alpha+\beta+\gamma = 4.$$

| $\alpha, \beta, \gamma$ értékei | Az egyes tagokban a főmennyiségek | Együtthatóik |
|---|---|---|
| 4, 0, 0 | $a^4b^0c^0,\ a^0b^4c^0,\ a^0b^0c^4.$ | $\frac{4!}{4!0!0!} = 1$ |
| 3, 1, 0 | $a^3b^1c^0,\ a^3b^0c^1,\ b^3c^0a^1,\ c^3a^1c^0,\ c^3a^0b^1.$ | $\frac{4!}{3!1!0!} = 4$ |
| 2, 2, 0 | $a^2b^2c^0,\ a^2b^0c^2,\ a^0b^2c^2.$ | $\frac{4!}{2!2!0!} = 6$ |
| 2, 1, 1 | $a^2b^1c^1,\ a^1b^2c^1,\ a^1b^1c^2.$ | $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ |

és így

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 \quad &= a^4+b^4+c^4+\\ &+4a^3b+4a^3c+4b^3c+4b^3a+4c^3a+4c^3b+\\ &+6a^2b^2+6b^2c^2+6c^2a^2+\\ &+12a^2bc+12b^2ca+12c^2ab.\end{aligned}$$

Végül könnyen meghatározhatjuk még a $K=(a_1+a_2+\ldots+a_p)^n$ kifejtésében a tagok számát is. Ugyanis minden tagnak

$$a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_p^{\alpha_p}=a_1a_1\ldots a_1^{\alpha_1}a_2\ldots a_2^{\alpha_2}\ldots a_p\ldots a_p^{\alpha_p}$$

alakja van, a hol

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=n.$$

Annyi tagja van tehát a $K$-nak, a hány ismétléssel alkotható $n$-ed osztályú kombinácziója van $p$ elemnek; vagyis:

$$C_n^i(p)=C_n(n+p-1)=C_{p-1}(n+p-1),$$

mert

$$\binom{n+p-1}{n}=\binom{n+p-1}{p-1}.$$

Tehát

$$C_n^i(p)=C_n(n+p-1)=\frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots p}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

vagy

$$C_n^i(p)=C_{p-1}(n+p-1)=\frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)}.$$

A számolásnál az előbbit vagy utóbbit használjuk, a mint $n \lesseqgtr p$.

A kidolgozott feladatnál, minthogy $4>3$, az utóbbi formulát használjuk:

$$C_4^i(3)=C_2(6)=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15.$$

A polynomiális tétel segélyével igen egyszerű bizonyítását adhatjuk *Euler* tételének, a melynek a *Fermat*-féle tétel egyszerűbb esete. Ha ugyanis:

$$a_1=a_2=\ldots=a_p=1,$$

akkor

$$(a_1+a_2+\ldots+a_p)^n=p^n.$$

A jobb oldalon vannak olyan tagok $(a_1^n,\ a_2^n,\ \ldots\ ,a_p^n)$, a melyekben a tényezők hatványkitevői: $n,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,0$, tehát együtthatóik:

$$\frac{n!}{n!0!0!\ldots 0!}=1.$$

Ezen tagok összege

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_p^n=1+1+\ldots+1=p.$$

Lesz tehát

$$p^n-p=\Sigma\frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_p!},\ \text{hol}\ a_1+a_2+\ldots+a_p=n.$$

E kifejezésben azonban most már $a_1+a_2+\ldots+a_p$ hatványkitevők mindegyike *$n$-nél kisebb* positív egész szám vagy nulla, mert ha csak egy is $n$-nel egyenlő, akkor a többi 0 és ezeket a tagokat a baloldalra vittük. Ámde $\frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_p!}$ az $n$ elemből ismétléssel alkotott *permutácziók számát* jelenti, ha az elemek közt $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p$ egyenlő van, tehát minden $A=\frac{n!}{a_1!\ldots a_p!}$ egész szám. Ha tehát $n$ absolut prímszám, akkor a nevezőben levő tényezők mind kisebbek lévén n-nél, ez az egyszerűsítésnél nem eshetik ki, tehát minden $A$ és így az egész $\Sigma\frac{n!}{a_1!\ldots a_p!}$ és evvel együtt $p^n-p$ is osztható $n$-nel.

Tehát:

*Euler tétele:* "A $p^n-p$ különbség osztható $n$-nel, ha $n$ absolut prímszám".

Euler tételének közvetlen folyománya *Fermat* tétele. Ugyanis, ha $n$ absolút prímszám, akkor

$$p^n-p=n\cdot N=p(p^{n-1}-1)$$

vagy

$$\frac{p(p^{n-1}-1)}{n} = N,$$

a hol $N$ egész szám. Ha már most $p$ és $n$ relatív prímszámok, akkor kell, hogy $(p^{n-1}-1)$ osztható legyen $n$-nel, vagyis:

*Fermat tétele:* "Ha $n$ absolút prímszám nem osztója a $p$-nek, akkor $(p^{n-1}-1)$ osztható $n$-nel"