(Ismétléssel.)

Ha megengedjük, hogy a variáczió- és kombináczió- csoportok elemei között ugyanazon elem többször is előforduljon, akkor ismétléssel alkotott variáczió – illetőleg kombináczió – csoportokról beszélhetünk, melyeknek számát $V_r^{\mathrm{i}}(n)$, illetőleg $C_r^{\mathrm{i}}(n)$ jelöljük. Ha pedig az adott elemek között egyenlők is vannak, azaz a pl. α-szor, b pl. β-szor stb. fordul elő, akkor ezen elemek permutáczióit meg kell különböztetnünk azoktól, melyekben egyenlő elemek nem fordulhatnak elő. Az ilyen permutácziók számát $P_n(a^\alpha,\ b^\beta,\ c^\gamma,\ \dots\ l^\lambda)$-val jelöljük, a hol $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\ \lambda$ 1-gyel is lehetnek egyenlők és azt mutatják, hogy az egyes elemek hányszor fordulnak elő minden csoportban. Így tehát

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=n.$$

Czélunk első sorban a $V_r^{\mathrm{i}}(n)$-et kiszámítani. Képzeljük e végből, hogy az összes n elemből ismétléssel alkotott $(r-1)$-ed osztályú variáczió-csoportokat felírtuk. Minthogy ugyanazon elem többször is előfordulhat, azért minden $(r-1)$-ed osztályú csoporthoz most n új elemet fűzhetünk, vagyis:

$$V_r^{\mathrm{i}}(n)=n\cdot V_{r-1}^{\mathrm{i}}(n),$$

épp így

$$V_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)=n\cdot V_{r-2}^{\mathrm{i}}(n),$$

$$\dots$$

$$V_2^{\mathrm{i}}(n)=n\cdot V_1^{\mathrm{i}}(n)$$

$$V_1^{\mathrm{i}}(n)=V_1(n)=n.$$

Eme egyenleteket egymással megszorozva, nyerjük, hogy:

$$V_r^{\mathrm{i}}(n)=n^{\mathrm{r}}.$$

Vagyis az n elemből ismétléssel alkotott r-ed osztályú variáczió-csoportok számát nyerjük, ha n-et az r-edik hatványra emeljük.

Hogy a $C_r^{\mathrm{i}}(n)$-et kiszámíthassuk, következőképpen járunk el. Képzeljük, hogy az n elemből, ismétléssel alkotott összes r-ed osztályú kombinácziócsoportokat felírtuk; akkor, minthogy minden csoportban r elem van, az összes felírt elemek száma $r\cdot C_r^{\mathrm{i}}(n)$, vagyis minden egyes elem (pl. x) $\frac{r}{n}\cdot C_r^{\mathrm{i}}(n)$-szer fordul elő. Ezen (x) elemek számát másként is előállíthatjuk. Ha ugyanis kiválasztjuk mindazon csoportokat, a melyek x-et tartalmazzák és mindegyikből az x-et egyszer elhagyjuk, akkor visszamaradnak az adott n elemből, ismétléssel alkotott összes $(r-1)$ osztályú kombináczió-csoportok, Ezúttal, tehát $C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)$ elemet hagytunk el és minthogy a $C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)$ kombináczió-csoportban x még $\frac{r-1}{n}C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)$-szer előfordul, azért

$$\frac{r}{n}C_r^{\mathrm{i}}(n)=C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)+\frac{r-1}{n}C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n),$$

miből

$$r\cdot C_r^{\mathrm{i}}(n)=(n+r-1)C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n),$$

épp így

$$(r-1)C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)=(n+r-2)C_{r-2}^{\mathrm{i}}(n),$$

$$\dots$$

$$2C_2^{\mathrm{i}}(n)=(n+1)C_1^{\mathrm{i}}(n),$$

$$C_1^{\mathrm{i}}(n)=C_1(n)=n.$$

Eme egyenleteket egymással megszorozva nyerjük, hogy:

$$C_r^{\mathrm{i}}(n)=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\dots(n+1)n}{1\cdot2\cdot3\cdot\dots\ r}=\binom{n+r-1}{r}=C_r(n+r-1).$$

Vagyis az n elemből, ismétléssel alkotott r-ed osztályú kombinácziók száma akkora, mint az $(n+r-l)$ elemből, ismétlés nélkül alkotott r-ed osztályú kombinációk száma.

Ezek alapján könnyen kimutatható, hogy

$$C_r^{\mathrm{i}}(n)=C_{r-1}^{\mathrm{i}}(n)+C_r^{\mathrm{i}}(n-1).$$

Ha ez utolsó képlet érvényességét minden esetben fenn akarjuk tartani, akkor a

$$C_1^{\mathrm{i}}(n)=C_0^{\mathrm{i}}(n)+C_1^{\mathrm{i}}(n-1)$$

egyenletből

$$C_0^{\mathrm{i}}(n) = 1$$

Végül még ama permutácziók számát kell kiszámítanunk, melyekben az elemek ismétlődnek. Legyen az n adott :

$$aa \dots abb \dots b \dots l \cdot l \dots l,$$

mely csoportban az $a,\ b,\ \dots,\ l$ elemek rendre $\alpha,\ \beta,\ \dots,\ \lambda$-szor forduljanak elő, miért is

$$\alpha + \beta + \ \dots\ + \lambda = n.$$

Hogy a csoportok számát meghatározhassuk, adjunk az egyenlő elemeknek indexeket és tegyük fel, hogy az így felírt elemek mind különbözők:

$$a_1 a_2 \dots a_\alpha b_1 b_2 \dots b_\beta c_1 c_2 \dots c_\gamma \dots l_1 l_2 \dots l_\gamma.$$

Eme most különbözőnek vett n elem permutáczióinak száma $P(n)$. A $P(\alpha)$ csoportokban egymás mellett megmaradnak az a-k, $P(\beta)$-ban a b-k és í. t' $P(\lambda)$-ban az l-ek. Ha tehát az $a - k,\ b - k, \dots l$-ek identikus elemek lesznek, akkor a különböző permutácziók száma $P(\alpha)$-szor, $P(\beta)$-szor, $\dots P(\lambda)$-szor kisebb lesz; vagyis:

$$P_n = (a^\alpha,\ b^\beta,\ \dots\ l^\lambda) = \frac{P_(n)}{P(\alpha) \cdot P(\beta) \dots P(\lambda)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots\ \lambda!}.$$