Adva van n különböző elem, melyeket rendre $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (n-1),\ n$-nel vagy az abc betűivel jelölünk.

Ha kiválasztunk $k(k \leqq n)$ elemet és ezeket egymás mellé írjuk, akkor az n adott elem egy k-ad osztályú *csoportját* kapjuk. Ha az egyes csoportokat nemcsak a bennük előforduló elemek, hanem azok elhelyezése szerint is megkülönböztetjük, akkor a csoport az n adott elem k-ad osztályú variáczióját képezi, melyet $k = n$ esetében permutáczió-csoportnak nevezünk.

$$\begin{matrix} 12, & 13, & 14, & \ldots \\ 21, & 23, & 24, & \ldots \end{matrix}$$

tehát különböző variáczió-csoportok.

Ha ellenben az elemek sorrendjére tekintettel nem vagyunk, akkor a kérdéses csoport az n adott elem k-ad osztályú kombináczió ja.

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321,$$

tehát identikus kombináczió-csoportok, mert ugyanazon elemeket -különböző sorrendben is- tartalmazzák.

Jelöljük az n adott elemből alakítható k-ad osztályú variácziók számát $V_k(n)$-nel, a k-ad osztályú kombinácziók számát $C_k(n)$-nel és az n elemből alakítható permutácziók számát $P(n)$-nel. A következőkben czélunk oda irányul, hogy ezeket kiszámíthassuk.

Az n adott elemből alakítható 1-ső osztályú variácziók:$1,\ 2,\ 3, \ldots n$, vagyis

$$V_1 = n.$$

A másodosztályú variációkat az első osztályúból alakíthatjuk; általában a k-ad osztályút a $(k-1)$-ed osztályúból, még pedig a következőképpen.

Képzeljük el, hogy az n elemből alakítható $(k-1)$-ed osztályú variácziók már mind fel vannak írva és jelöljük ezen variácziók egyikét x-szel, akkor még $n-(k-1) = n-k+1$ oly elem van, a melyet az x nem tartalmaz. Ha ezen $n-k+1$ elem bármelyikét x-hez függesztjük, akkor csupa k-ad osztályú csoportot kapunk. Ily módon x-ből $n-k+1$, tehát $V_{k-1}(n)$-ből új csoportot kapunk.

Már most kimutathatjuk, hogy az $(n-k+1)V_{k-1}(n)$ csoport mind különbözik egymástól. Ha ugyanis két k-ad osztályú csoportot ugyanazon x-ből képeztünk, akkor az utolsó elemben különböznek, ha pedig különböző $(k-1)$-ed osztályú variációból alakítottuk őket, akkor eo ipso különböznek egymástól.

Másodszor kimutatjuk, hogy az összes k-ad osztályú variácziót felírtuk ily módon. Ha ugyanis y egy tetszésszerinti k-ad osztályú variáczió, akkor utolsó elemét elhagyva egy $(k-1)$-ed osztályú variácziót kapunk, a mely a $V_{k-1}(n)$-ben minden esetre előfordul; legyen ez pl. a. Ámde a-hoz az összes benne elő nem forduló $n-k+1$ elemet hozzákapcsoltuk, tehát y-t csakugyan képeztük. Tehát

$$V_k(n) = (n-k+1) \cdot V_{k-1}(n) \tag{1}$$

éppígy

$$V_{k-1}(n) = (n-k+2) \cdot V_{k-2}(n)$$

$$\ldots$$

$$V_3(n) = (n-2) \cdot V_2(n)$$

$$V_2(n) = (n-1) \cdot V_1(n)$$

$$V_1(n) = n.$$

Ezen egyenleteket összeszorozva, kapjuk, hogy

$$V_k(n) = (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n \tag{2}$$

Az n elemből alakítható k-ad osztályú variácziók számát tehát az n-től $(n-k+1)$-ig terjedő egész számok szorzata adja.

Minthogy

$$P(n) = V_n(n),$$

azért

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n,$$

a mit még így is szoktunk írni:

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n! \tag{3}$$

Az n elemből alakítható permutácziók számát tehát megkapjuk, ha a természetes számsor számait 1-től n-ig egymással megszorozzuk.

Végül számítsuk ki $C_k(n)$-et.

Képzeljük el e végből, hogy az összes k-ad osztályú kombinációkat felírtuk; akkor minden egyes kombinácziócsoportból az elemek permutálása által más és más, vagyis összesen $P(k)$ variácziót nyerünk. Ezen variácziók között nincsenek identikusak. Ha ugyanis x és y két tetszőleges variáczió, akkor ezek vagy egy és ugyanazon kombinácziócsoport permutácziójából keletkeztek és ekkor az elemek nem lehetnek ugyanazon sorrendben, tehát a csoportok különbözők; vagy különböző kombináczió-csoportokból származtak, s ekkor különböző elemeket is tartalmaznak, tehát szintén különbözők.

Másodszor ilyen módon minden képzelhető variáczió-csoportot előállítottunk, a mi nem is szorul bizonyításra.

Fennáll tehát ama összefüggés, hogy:

$$V_k(n) = C_k(n) \cdot P(k), \tag{4}$$

miből

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \binom{n}{k}. \tag{5}$$

Az n elemből alkotható k-ad osztályú kombinácziók száma oly tört alakjában írható fel, melynek számlálója k darab n-től lefelé menő egymásután következő szám szorzatából, nevezője pedig ugyancsak k darab 1-től felfelé menő szám szorzatából áll.

A $C_k(n)$-et más alakban is előállíthatjuk, ha az (5) számlálóját és nevezőjét $1\cdot 2\cdot 3\dots(n-k) = (n-k)!$-sal szorozzuk.

$$C_k(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\dots 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6}$$

ámde éppígy

$$C_{n-k}(n) = \frac{n!}{(n-k)k!}$$

s így

$$C_k(n) = C_{n-k}(n) \text{ vagy } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{7}$$

Azt is könnyen kimulathatjuk; hogy:

$$C_k(n) + C_{k-1}(n) = C_k(n+1). \tag{8}$$

Ugyanis:

$$C_k(n) + C_{k-1}(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_k(n+1).$$

Tehát

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{9}$$

Az eddigiek szerint $C_0(n) = \binom{n}{0}$-nek nincs értelme. Ha azonban a (7) érvényességét minden esetben fenn akarjuk tartani, akkor $\binom{n}{0}$-t úgy értelmezzük, hogy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

A $V_0(n)$-t úgy értelmezzük, hogy (1) a $k = 0$ esetében is érvényes legyen, vagyis hogy:

$$V_1(n) = nV_0(n) = n,$$

miért is tehát akkor

$$V_0(n) = 1.$$

Ha pedig a (3) érvényességét is biztosítani akarjuk a $k = 0$ esetére is, akkor:

$$V_0(n) = C_0(n) \cdot P(0),$$

miből

$$P(0) = \frac{V_0(n)}{C_0(n)} = 1,$$

tehát

$$0! = 1.$$