A következőkben a komplex számokkal végezhető műveleteket fogjuk áttekinteni, ha azok trigonometrikus alakban vannak megadva.

I.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= (r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2) + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2).$$

Ha

$$R\cos\varphi = r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 \tag{1}$$

és

$$R\sin\varphi = r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2 \tag{2}$$

akkor osztással nyerjük, hogy

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2}{r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2}, \tag{3}$$

ha pedig mindkét egyenletet négyzetre emelés után összeadjuk, akkor:

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{4}$$

A (3) és (4)-ből látható, hogy csakugyan lehetséges olyan φ-t és R-et meghatározni, melyek (1)-et és (2)-őt kielégítik. Írhatjuk tehát, hogy minden esetben:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Vagyis itt is kitűnik, hogy két komplex szám összege ismét komplex számot ad. Ugyan e tétel érvényes a komplex számok kivonására is, mely esetben ugyanúgy járunk el, mint elébb.

II.

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2 \cdot [(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin\varphi_1 + \varphi_2)]$$

jobban általánosítva:

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)]\ \ldots\ [r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)] =$$
$$= r_1r_2\ \ldots\ r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 +\ \ldots\varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 +\ \ldots\ \varphi_n)]$$

Tehát két, vagy több komplex szám szorzata ismét komplex számot ad, melynek modulusa a tényezők modulusainak szorzatával, argumentuma pedig a tényezők argumentumainak összegével egyenlő.

III.

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Két komplex szám hányadosa tehát oly komplex számot ad, melynek modulusa az osztandó és osztó modulusának hányadosa, argumentuma pedig az osztandó és osztó argumentumainak különbsége.

IV.

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\ \ldots\ r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$$

$$= r\ \cdot\ r\ \cdot\ r\ \ldots\ r[\cos(\varphi + \varphi +\ \ldots + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi + \varphi\ \ldots\ + \varphi)] = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi). \tag{1}$$

Valamely komplex szám n.-ik hatványa oly komplex szám, melynek modulusa az alap modulusának n.-ik hatványa, argumentuma pedig az alap argumentumának n-szerese.

E tétel azonban akkor is érvényes, ha a hatványkitevő negatív egész szám, vagy tört. Ugyanis:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}.$$

Az osztást végrehajtva $III.$ szerint nyerjük, hogy

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = r^{-n}[(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)].$$

Ha pedig a hatványkitevő törtszám, akkor:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right). \tag{2}$$

A felírt egyenlőség helyességéről rögtön meggyőződünk, ha mindkét oldalt felemeljük az n.-ik hatványra, mert akkor a következő identitáshoz jutunk:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ez utóbb nyert egyenlet még a következőképp is írható:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Minthogy pedig:

$$\begin{cases}\cos\varphi = \cos(\varphi + 2k\pi) \\ \sin\varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)\end{cases} \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots)$$

tehát

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{3}$$

Tehát: Valamely komplex szám n.-ik gyökének modulusa a radicandus modulusának positiv n.-ik gyöke, argumentuma pedig a radicandus argumentumának n-ed része.

A (3)-ban k felvehet minden egész számú értéket. Azt lehetne tehát gondolni, hogy valamely számnak végtelen sok különböző gyöke van. A következőkben megmutatjuk, hogy:

Valamely komplex szám n.-ik gyökének n egymástól független gyöke van.

Ugyanis:

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{\varphi - 2k\pi}{n}$$

és

$$\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\frac{\varphi - 2k\pi}{n},$$

miből folyik, hogy elégséges, ha k-nak positív $(0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ értékeket adunk. Ha $k = n$, akkor

$$\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) = \cos\frac{\varphi}{n}$$

és

$$\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) = \sin\frac{\varphi}{n}$$

vagyis ugyanazt a gyököt kapjuk, mint $k = 0$ esetben. Legyen

$$\frac{k}{n} > 1,$$

akkor

$$\frac{k}{n} = q + \frac{r}{n},$$

a hol már tehát

$$\frac{r}{n} < 1, \qquad \text{tehát} \qquad r < n.$$

Ebben az esetben

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2q\pi\right) = \cos\frac{\varphi + 2r\pi}{n}$$

és

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi\right) = \sin\frac{\varphi + 2r\pi}{n}.$$

Független gyököket tehát csak akkor kapunk, ha $k < n$, ha tehát $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, miből következik kimondott tételünk helyessége.

A $IV.$ alatti képleteket *Moivre*-féle képleteknek nevezzük.