Az

$$x^2 = A \tag{1}$$

egyenlet a valós számok körében megoldható, ha A nem negatív; ekkor az egyenlet megoldását az

$$x = \sqrt{A} \tag{2}$$

alakban adhatjuk meg.

Ha A negativ, akkor két út áll előttünk: vagy azt mondjuk, hogy $A < O$ esetében az (1) egyenletnek egyáltalában nincs megoldása, vagy olyan új számfogalmat építünk fel, melyben az (1) egyenletnek minden esetben van megoldása. Mi az utóbbi utat követjük és $\sqrt{A}$ symbolum értelmét általánosítva, megállapodunk abban, hogy $\sqrt{A}$ minden esetben ($A \lesseqqgtr 0$) oly számot jelentsen, melynek négyzetét számításainkban A-val helyettesíthetjük. Tehát

$$(\sqrt{A})^2 = A.$$

Ha A negatív ($A = -a$), akkor $\sqrt{A}$-t tisztán képzetes vagy imaginárius számnak nevezzük.

Először is az a kérdés, mikor nevezünk két imaginárius számot egyenlőnek? Megállapodunk abban, hogy ($a \geqq 0,\ b \geqq 0$):

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-b},$$

ha

$$a = b$$

vagyis ha

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}.$$

Ha $\sqrt{a}$-t és $\sqrt{b}$-t a $\sqrt{-a}$, illetőleg a $\sqrt{-b}$ tisztán képzetes számok komponenseinek nevezzük, akkor mondhatjuk, hogy:

"Két imaginárius számot egyenlőnek mondunk, ha komponenseik egyenlők." A legegyszerűbb imaginárius szám $\sqrt{-1}$, melyet állandóan i-vel jelölünk és imaginárius egységnek nevezünk. Értelmezése az

$$i = \sqrt{-1}$$

vagy az

$$i^2 = -1$$

egyenletek segélyével történhetik.

Kényelmesnek és hasznosnak ígérkezik a képzetes számokkal való műveletek olynemű megállapítása, hogy a gyökmennyiségekkel való műveleti törvények érvényesek maradjanak akár positív, akár negatív a radikandus.

Megállapodunk tehát abban, hogy negatív radikandus esetében is:

$$a\sqrt{A} + b\sqrt{A} + \ldots + l\sqrt{A} = (a + b + \ldots + l)\sqrt{A}$$

és

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} \ldots \sqrt{L} = \sqrt{A \cdot B \cdot C \ldots L}$$

legyen.

Most már kimutathatjuk, hogy:

"Minden imaginárius szám előállítható, mint a képzetes egység és komponensének (tehát egy valós szám) szorzata."

Ha ugyanis $a > 0$, akkor

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}.$$

Minthogy :

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{és} \quad i^2 = -1,$$

azért

$$i^3 = -i \quad \text{és} \quad i^4 = 1$$

vagy általában

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Az i-nek tehát van oly hatványa, mely a $+1$-gyel egyenlő, tehát jogosan nevezhető egységnek.

Végül megállapodunk abban is, hogy:

$$0 \cdot i = 0,$$

miáltal kimondhatjuk a következő szabályt:

"Képzetes számokkal a kijelölt műveleteket a közönséges algebrai szabály szerint végezzük el, de úgy, hogy folyton szem előtt tartjuk a képzetes egység különböző hatványainak értékét."

Ezek után áttérhetünk a komplex számok tárgyalására. Ha egy valós és egy imaginárius számot a plus vagy mínus jellel egymás mellé írunk, általános képzetes vagy komplex számot nyerünk. Általános alakja:

$$a + bi,$$

a hol az a és b valós számokat a komplex szám komponenseinek nevezzük.

Itt is először avval a kérdéssel akarunk tisztába jönni, mikor mondjuk két komplex számról, hogy azok egyenlők.

Megállapodunk abban, hogy

$$a + bi = c + di,$$

ha

$$a = c$$

és

$$b = d.$$

Vagyis: "Két komplex számot egyenlőnek mondunk, ha megfelelő komponenseik rendre egyenlők".

E megállapodásból rögtön következik, hogy:

"Valamely komplex szám nullával egyenlő, ha komponensei nullával egyenlők."

Ugyanis, ha

$$a + bi = 0,$$

akkor

$$a + bi = 0 + 0 \cdot i,$$

tehát

$$a = 0; \; b = 0.$$

A komplex számokkal való műveletekre a következő megállapodásokat tartjuk szem előtt.

I.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

II.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

III.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Mindezekből látható, hogy a komplex számok összeadásánál és szorzásánál stb. a valós számokra vonatkozó műveleti törvények szerint járunk el, figyelembe vesszük azonban, hogy $i^2 = -1, \; i^3 = -i$ stb.

Az is látható, hogy komplex számok összege, különbsége, szorzata és evvel együtt hatványa és hányadosa általában ismét komplex számok.

Kivételt csakis az u.n. konjugált komplex számok, mint pl. $a + bi$ és $a - bi$ képeznek, melyeknek összege és szorzata valós:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

és

$$(a + bi) + (a - bi) = a^2 + b^2.$$

A komplex számok bevezetése után a másodfokú egyenlet minden esetben megoldható. Ha ugyanis az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenletben az együtthatók valós számok, akkor, ha a diszkriminánsa

$$D = b^2 - 4ac < 0,$$

úgy

$$-D > 0,$$

tehát az egyenlet megoldása az

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-D}}{2a} \cdot i$$

alakban jelenik meg.

A képzetes számok geometriai előállítása.

Láttuk, hogy valamely képzetes szám egészen meg van határozva, ha komponenseit ismerjük. Másrészt pedig tudjuk, hogy a sík bármely pontja egészen meghatározott, ha ismerjük koordinátáit. Közelfekvő gondolat tehát, hogy valamely sík pontjait oly módon hozzuk vonatkozásba a képzetes számokkal, hogy minden $(a_1 + a_2 i)$ számnak oly A pont feleljen meg, melynek koordinátái a_1 és a_2 és pedig úgy, hogy a_1 legyen az A abscissája, a_2 pedig az ordinátája.

Ha $a_2 = 0$ akkor az ilyen számoknak megfelelő pontok az abcissa tengelyen feküsznek, tehát

"A valós számok összesége az abscissa tengelyen ábrázolható."

Ha $a_1 = 0$, akkor az ilyen számoknak megfelelő pontok abscissái nullával egyenlők, tehát az ordináta tengelyen feküsznek, vagyis:

"A tiszta képzetes számoknak megfelelő pontok az ordináta tengelyen feküsznek."

Az OA távolságot, vagyis a komplex szám távolságát a koordináták kezdőpontjától, az illető szám modulusának, azt a szöget pedig, melyet az OA az abscissa tengely positív irányával bezár, a szám argumentumának vagy azimutjának nevezzük. A modulus r mindig positív, az argumentumról (φ) pedig megjegyezzük, hogy 0-tól 2π-ig $(360°)$ változik.

Az $A = a_1 + a_2 i$ complex szám komponensei, modulusa és argumentuma között a következő összefüggések állanak fenn:

$$a_1 = r \cdot \cos\varphi, \qquad a_2 = r \cdot \sin\varphi$$

és

$$r = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1}.$$

Az a_1 és a_2 itt talált értékeit felhasználva, nyerjük az A komplex szám trigonometrikus alakját; t. i.

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

vagy, mert

$$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi$$

és

$$\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi$$

egész általánosan:

$$A = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$$

(a hol $k = 0,\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots$ lehet.)

Ha

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

akkor kell, hogy legyen :

$$r_1\cos\varphi_1 = r_2\cos\varphi_2$$

és

$$r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2;$$

e két egyenlet mindegyikét négyzetre emelve és összeadva nyerjük:

$$r_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2),$$

miből

$$r_1^2 = r_2^2$$

vagyis

$$r_1 = r_2.$$

Ezt tekintetbe véve:

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$$

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2.$$

Ha pedig két szög cosinusai és sinusai rendre egyenlők, akkor a szögek is egyenlők, vagy legfeljebb 2π egész számú többszörösében különböznek, vagyis:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

"Két komplex szám tehát egyenlő, ha modulusuk és argumentumaik külön-külön egyenlők."