Legyenek a téglatest egy csúcsába összefutó élek a, b, c, testátlója d. Mivel a közölt feldarabolással a lapokat egy darabban kaphatjuk meg, ezért az osztóvonalak párhuzamosak a négyzet oldalaival, tehát a négyzet e oldala is egész szám. Így a test felszínének mértékszáma négyzetszám. A feladat szerint adódó

$$abc = 2(ab + ac + bc) \qquad (= e^2) \tag{1}$$

egyenletből osztással

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{2}$$

Feltehetjük, hogy $a \leqq b \leqq c$. Így egyrészt[1]

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}, \quad \text{másrészt} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{a},$$

ezekből $a \leqq 6$ és $a > 2$, tehát a értéke 3, 4, 5, vagy 6.

$a = 3$-mal hasonlóan kapjuk: $6 < b \leqq 12$. Továbbá (1)-ből

$$c = \frac{2ab}{ab - 2(a+b)} = \frac{2ab}{(a-2)b - 2a} = \frac{6b}{b-6}. \tag{3}$$

Így az $abc = e^2$ követelményből

$$\frac{18b^2}{b-6} = e^2, \quad \text{tehát} \quad b - 6 = 2 \cdot \left(\frac{3b}{e}\right)^2,$$

vagyis a $b - 6$ egész szám egy négyzetszám 2-szeresével egyenlő. Mivel $0 < b - 6 \leqq 6$, és már $2 \cdot 2^2 > 6$, azért csak $3b/e = 1$, $b - 6 = 2$ felelhet meg, tehát $b = 8$, $c = 24$, $e = 24$. Így azonban $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 649$ nem teljes négyzet, az értékrendszer nem felel meg.

$a = 4$-gyel hasonlóan $4 < b \leqq 8$, és (3) szerint

$$abc = \frac{2a^2b^2}{(a-2)b - 2a} = \frac{16b^2}{b-4} = e^2, \qquad b - 4 = \left(\frac{4b}{e}\right)^2,$$

vagyis $b - 4$ teljes négyzet. És mivel $0 < b - 4 \leqq 4$, azért $b - 4$ értéke 1, vagy 4. Ezekkel a, b, c, e-re a

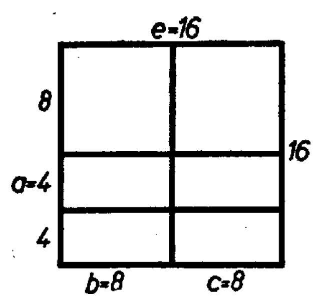
(I.) 4, 5, 20, 20, ill.

(II.) 4, 8, 8, 16

lehetőségek jönnek szóba. A testátló mindkettőben egész: $d = 21$, ill. $d = 12$.

$a = 5$ és $a = 6$-ból nem kapunk megfelelő a, b, c értékhármast. Mindkét esetben $b \leqq 6$, továbbmenve $a = 5$, $b = 5$-ből $c = 10$, és így abc nem teljes négyzet, ugyanígy $a = b = c = 6$ esetén sem, $a = 5$, $b = 6$ mellett pedig c nem egész.

Mármost I. esetében az $e = 20$ egységnyi oldalú négyzetből két $a \times c = 4 \times 20$, két $b \times c = 5 \times 20$ és két $a \times b = 4 \times 5$ egységnyi méretű téglalapot kellene egy darabban kivágnunk. Az első négy kivágása egyértelmű, mert $c = e$, az ezek után visszamaradó 2×20 méretű téglalapból azonban lehetetlen a 4×5 méretű lapokat kivágni.



II. esetében a szétvágásra ábránk egy lehetőséget mutat, eszerint a feladat egyetlen megoldása az, ha a téglatest éleinek hossza 4, 8, 8 egység (felezősíkkal kettévágott 8 egységnyi élű kocka).

Tistyán Péter (Békéscsaba, Rózsa F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A fenti eredményhez a szétvágási követelményből kiinduló próbálkozással is el lehet jutni, – csak az nem derül ki, hogy ez az egyetlen megoldás. Ugyanis a téglatest papírmodelljéről a két $b \times c$ méretű lapot félretéve, a

[1] Az alkalmazott gondolatmenetet részletesebben lásd K. M. L. 19 (1959) 83. o.

maradó palástot két szemben fekvő éle mentén felvágva és egymás mellé illesztve lefedhetünk egy $(b+c)\times(2a)$ méretű téglalapot. A $b\times c$ méretű lapokat $(2b)\times c$ méretű téglalappá összeillesztve amazzal mindenesetre téglalapot adhat, ha $2b=b+c$, vagyis $b=c$. Ez a téglalap akkor lesz négyzet, ha $2b=c+2a$, vagyis $b=c=2a$. Ezekből $d=3a$. Ha a egész, akkor b, c és d egész. A felszín és a térfogat mértékszámai azonban csak akkor egyenlők: $16a^2=4a^3$, azaz ha $a=4$, vagyis a hosszúságegység a rövidebb él negyedrésze.

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VIII. o. t.)
Lipcsey Zsolt (Budapest, Petőfi S. g. II. o. t.)