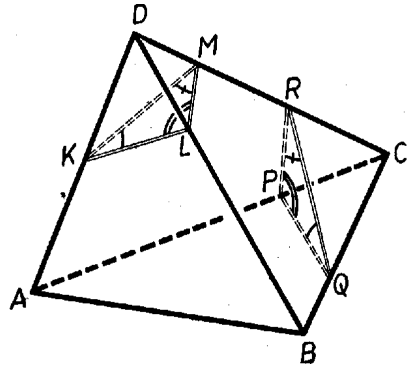
I. megoldás. A hasonlóság úgy áll fenn, hogy P, Q, R rendre L, K, M-nek felel meg.



Ennek bizonyítására a megfelelő oldalak arányának egyenlőségét fogjuk megmutatni:

(1) $$PR : QR = LM : KM \quad \text{és}$$
(2) $$PR : PQ = LM : LK.$$

A 615. gyakorlatban[1] segédtételként bebizonyítottuk (könnyen következik abból, hogy $ABLK$, $BCML$, $CAKM$ húrnégyszög), hogy

(3) $$DKL\triangle \sim DBA\triangle,$$
(4) $$DLM\triangle \sim DCB\triangle,$$
(5) $$DMK\triangle \sim DAC\triangle,$$

úgy, hogy a csúcspárok a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak. Ezeknek a kapcsolatoknak a G_2-vel létrejött és a G_1-étől csak jelölésben különböző pontrendszerben a következők felelnek meg:

(6) $$CPQ\triangle \sim CBA\triangle,$$
(7) $$CQR\triangle \sim CDB\triangle,$$
(8) $$CRP\triangle \sim CAD\triangle.$$

Mivel (4) és (7), továbbá (5) és (8) jobb oldalán ugyanaz a háromszög áll, azért

(9) $$CQR\triangle \sim LDM\triangle,$$
(10) $$CRP\triangle \sim KMD\triangle.$$

Mármost (10) és (9)-ből
$$\frac{PR}{RC} = \frac{DM}{MK}, \qquad \frac{RC}{QR} = \frac{ML}{DM},$$
és ezek összeszorzásával egyszerűsítés után (1) adódik.

Hasonlóan a rendre (8), (6), (9), (3)-on alapuló
$$\frac{\boldsymbol{PR}}{RC} = \frac{DA}{AC}, \qquad \frac{CQ}{\boldsymbol{PQ}} = \frac{AC}{BA},$$
$$\frac{CR}{QC} = \frac{\boldsymbol{LM}}{DL}, \qquad \frac{DA}{AB} = \frac{DL}{\boldsymbol{LK}}$$
egyenlőségek szorzata egyszerűsítés után (2)-t adja.

Huber Tibor (Budapest, Kossuth L. gépip. t. III. o. t.)

II. megoldás. A KLM háromszög alakjáról többet is mondhatunk, sőt kevesebb hasonló háromszög–pár felhasználásával. KLM oldalainak aránya független G_1 helyzetétől, kifejezhető az $ABCD$ tetraéder 6 élével:

(11) $$KL : LM : MK = AB \cdot CD : BC \cdot AD : CA \cdot BD,$$

Ugyanis (3) és (4), valamint (4) és (5)-ből
$$\frac{KL}{LD} = \frac{BA}{AD} \quad \text{és} \quad \frac{LD}{LM} = \frac{CD}{CB} \quad \text{ill.} \quad \frac{LM}{MD} = \frac{CB}{BD} \quad \text{és} \quad \frac{MD}{MK} = \frac{AD}{AC},$$

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 21(1960) 199: o.

és a két–két egyenlőség szorzásával (11) első, illetőleg második aránypárját kapjuk. Eredményünk így is írható:

$$KL = \lambda \cdot AB \cdot CD, \quad LM = \lambda \cdot BC \cdot AD, \quad MK = \lambda \cdot CA \cdot BD, \tag{12}$$

vagyis a D-ben összefutó lapokat oldallapoknak, ABC oldalait pedig alapéleknek nevezve KLM oldalai arányosak a velük egy oldallapon levő alapélnek és az evvel szemben levő oldalélnek szorzatával.

Mármost A, B, C, D helyére rendre B, A, D, C-t írva K, L, M helyére CB-n Q, CA-n P és CD-n R lép, és (11) így alakul:

$$QP : PR : RQ = BA \cdot DC : AD \cdot BC : DB \cdot AC, \tag{13}$$

és itt a szorzatok rendre egyenlők a (11)-beliekkel, tehát $QPR\triangle \sim KLM\triangle$.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy $QRP\sphericalangle = KML\sphericalangle$; ez (1)-gyel összekapcsolva bizonyítja az állítást. (9) és (10) szerint

$$QRC\sphericalangle = DML\sphericalangle = LMD\sphericalangle, \quad \text{ill.} \quad PRC\sphericalangle = DMK\sphericalangle = KMD\sphericalangle,$$

vagyis az RQ és ML egyenesek a CDB síkban, RP és MK egyenesek a CDA síkban tükrös párok az RM szakasz felező merőlegesére (az $R \equiv M$ lehetőségre gondolva így is mondhatjuk: a CD-re az RM felezőpontjában állított merőlegesre). Eszerint, ha a QRP szöget tükrözzük az RM szakasz felezőpontjában a CD-re merőlegesen álló síkra, tükörképe az $LMK = KML$ szög, és így egyenlő is vele. Ezt akartuk bizonyítani.

Az említett tükrösség G_1, G_2 minden helyzetében fennáll, mert a 615. gyakorlat megoldásából azt is látjuk, hogy G_1 helyén egy G' gömbbel a KLM és $K'L'M'$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)