I. megoldás. *a)* (1)-ből átrendezéssel, négyzetre emeléssel, majd $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítéssel $\sin x$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$3\cos x = -1{,}4 - 4\sin x,$$
$$9\cos^2 x = 9 - 9\sin^2 x = 1{,}96 + 11{,}2\sin x + 16\sin^2 x,$$
$$25\sin^2 x + 11{,}2\sin x - 7{,}04 = 0. \tag{3}$$

Eszerint csak olyan szög felelhet meg, amelyre

$$(\sin x)_1 = -4/5 = -0{,}8, \qquad (\sin x)_2 = 44/125 = 0{,}352. \tag{4}$$

Mindkét értékhez 0° és 360° között két x szög tartozik, éspedig a III. és IV., ill. az I. és II. körnegyedben, így mindkettőhöz két, egyenlő abszolút értékű, ellentett előjelű $\cos x$ érték tartozik. Ezért a két–két szög közül csak egy–egy elégítheti ki (1)-et, hogy melyik, azt behelyettesítéssel kellene kiválasztanunk. Ezt elkerülhetjük, ha (4)-ből előbb (1) alapján $\cos x$-et számítjuk ki:

$$(\cos x)_1 = +3/5 = 0{,}6, \quad (\cos x)_2 = -117/125 = -0{,}936,$$

mert így, két függvénye alapján x_1 és x_2 visszakeresése egyértelmű. Az előjel–pár szerint x_1 a IV., x_2 a II. körnegyedben van.

$$x_1 \approx 306{,}87° + k\cdot 360°, \qquad x_2 \approx 159{,}39° + k\cdot 360°,$$

ahol k egész szám. A körnegyed kijelölése után a visszakeresés akár $\sin x$-ből, akár $\cos x$-ből történhet, mert (3)-ból és (1)-ből visszafelé haladva azt kapjuk, hogy az összetartozó $\sin x$, $\cos x$ értékpárok négyzetösszege 1.

b) A (2) egyenletekből $\cos y$ és $\sin y$ kifejezését a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ azonosságba helyettesítve x-re egyismeretlenes egyenletet kapunk. Ez olyan típusú lesz, mint (1), mert ($2a$) és ($2b$)-ben az együtthatók abszolút értékének aránya ugyanaz: 13/41, ezért $\cos^2 x$ és $\sin^2 x$ együtthatói egyenlők, e két tag összege független x-től:

$$\left(\frac{13\cos x + 45}{41}\right)^2 + \left(\frac{3 - 13\sin x}{41}\right)^2 = 1,$$
$$169(\cos^2 x + \sin^2 x) + 1170\cos x - 78\sin x + 2034 = 1681,$$
$$195\cos x - 13\sin x = -87. \tag{5}$$

Innen az *a)* részben látott eljárással

$$\sin x_1 = 12/13 \approx 0{,}9231, \qquad \sin x_2 = -1269/1469 \approx -0{,}8639,$$
$$\cos x_1 = -5/13 \approx -0{,}3846, \qquad \cos x_2 = -740/1469 \approx -0{,}5037,$$

majd tovább ($2a$) és ($2b$) alapján

$$\sin y_1 = -9/41 \approx -0{,}2195, \qquad \sin y_2 = 1608/4633 \approx 0{,}3471,$$
$$\cos y_1 = 40/41 \approx 0{,}9756, \qquad \cos y_2 = 4345/4633 \approx 0{,}9378.$$

Ennélfogva az egyenletrendszernek két megoldása van:

$$\begin{cases} x_1 \approx 112{,}64° + k\cdot 360°, \\ y_1 \approx 347{,}32° + k\cdot 360°; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \approx 239{,}75° + k\cdot 360°, \\ y_2 \approx 20{,}31° + k\cdot 360°. \end{cases}$$

Horváth Kálmán (Kaposvár, Táncsics M. g. III. o. t.)

II. megoldás. *a)* Gondolva a

$$\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = \sin(x+\alpha)$$

azonosságra, keressünk olyan λ számot, amellyel (1)-et szorozva van olyan α szög, hogy a 3λ, 4λ együtthatók egyenlők $\sin\alpha$, ill. $\cos\alpha$-val. Így egyrészt az α, másrészt a jobb oldal alapján az $x+\alpha$ szöget meghatározva x-et kivonással kapjuk. λ akkor megfelelő, ha

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (3\lambda)^2 + (4\lambda)^2 = 25\lambda^2 = 1,$$

vagyis $\lambda = \pm 0{,}2$. Vegyük $\lambda = +0{,}2$-t, evvel $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$, tehát $\alpha = 36{,}87°$. Másrészt a szorzással adódó

$$0{,}6\cos x + 0{,}8\sin x = -0{,}28$$

egyenletből $\sin(x+\alpha) = -0{,}28$, így

$$x_1 + \alpha \approx 196{,}26°, \qquad x_2 + \alpha \approx 343{,}74°,$$

tehát

$$x_1 \approx 159{,}39°, \qquad x_2 \approx 306{,}87°.$$

b) Az y-nak az I. megoldás szerinti kiküszöbölésével nyert (5) megoldásában felhasználhatjuk pl. a

$$\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x = \cos(x-\beta)$$

azonosságot is. Szorozzuk (5)-öt olyan μ-vel, hogy álljon $195\mu = \cos\beta$, $-13\mu = \sin\beta$; vagyis $(195\mu)^2 + (-13\mu)^2 = 1$ alapján pl. $\mu = 1/13\sqrt{226}$-tal.

Így $\cos\beta > 0$, $\sin\beta < 0$, tehát $270° < \beta < 360°$. Ezt tudva β-t abból is kaphatjuk, hogy $\operatorname{ctg}\beta = \cos\beta/\sin\beta = 195 : (-13) = -15$, tehát $\beta \approx 356{,}19°$, másképpen $\beta \approx -3{,}81°$. Most már

$$\cos(x-\beta) = \frac{-87}{13\sqrt{226}} \approx -0{,}4452\text{-ből}$$

$$x_1 - \beta \approx 116{,}43°, \qquad x_2 - \beta \approx 243{,}57°,$$
$$x_1 \approx 116{,}43° + \beta \approx 112{,}64°; \qquad x_2 \approx 239{,}76°.$$

y-nak innen való meghatározásában hátrányt jelent, hogy x-et $\cos x$, $\sin x$ kiszámítása nélkül állapítottuk meg. Ezeket kikeresve kiszámíthatjuk $\cos y$-t és $\sin y$-t, és ezekből y-t; vagy pedig az (5)-öt előállító módszerrel x-et kiküszöbölve y-ra képezhetünk (5)-höz hasonló egyismeretlenes egyenletet. Ezt megoldva az adódó y' és y'' megoldásról ismét csak helyettesítéssel állapíthatjuk meg, hogy ezek x_1 és x_2 melyikével összekapcsolva adják a (2) rendszer teljes megoldását.

Vincze Imre (Budapest, XVIII. Hengersor úti g. III. o. t.)

Megjegyzés. A (2) egyenletrendszer együttható–párjainak abszolút értékben való megegyezése alapján egy további tetszetős elindulás is adódik: képezzük egyenleteink négyzetösszegét

$$13^2 - 2\cdot 13\cdot 41(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + 41^2 = 45^2 + 3^2,$$
$$\cos(x+y) = \cos s = \frac{13^2 + 41^2 - 45^2 - 3^2}{2\cdot 13\cdot 41} = -\frac{92}{13\cdot 41} \approx -0{,}1726.$$

Ezzel azonban egyenletünk kétismeretlenes maradt. És így akkor sem kerülhető el a gyökök behelyettesítéssel való kipróbálása, ha x_1, x_2-t valahonnét már ismerjük, ugyanis innen s-re két érték adódik:

$$s' \approx 99{,}94°(\text{ ez a fenti } x_1 + y_1) \text{ és } s'' \approx 260{,}06°(\text{ ez a fenti } x_2 + y_2).$$

Opálény Mihály (Budapest, Piarista g. III. o. t.)
Katona Éva (Budapest, Ybl M. ép. ip. t. III. o. t.)

III. megoldás (csak az (1) egyenletre). Ismeretes, hogy bármely szög mindegyik trigonometrikus függvénye a négy alapművelettel kifejezhető a feleakkora szög tangensével. Pl.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Ezek alapján (1)-ből, $\operatorname{tg} x/2 = t$ jelöléssel

$$3(1-t^2) + 8t = -1,4(1+t^2),$$
$$-1{,}6t^2 + 8t + 4{,}4 = 0, \quad t_1 = -0{,}5, \quad t_2 = 5{,}5.$$

Innen (0° és 180° között) $x_1/2 = 153{,}44°$, $x_2/2 = 79{,}70°$, és így (0° és 360° között) $x_1 \approx 306{,}88°$, $x_2 \approx 159{,}40°$.

Hasonlóan oldható meg (5) és folytatólag a (2) egyenletrendszer.

Kopornoky Zsolt (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Többen (1)-et és (2)-t 3 és 4, ill. 13 és ± 41 helyén tetszés szerinti együtthatókkal is megoldották. A megoldást nem mutatjuk be, mert ezt a később kitűzött 1085. feladat úgyis szükségessé tette. (1)-nek a III. megoldás mintájára való általános megoldása pedig az 1102. feladat tárgya lett.