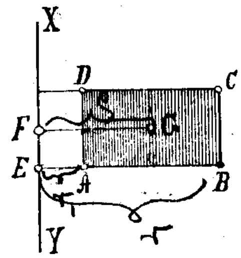
A Guldin-féle szabály. Stereometriai feladatok megoldásánál gyakran hivatkozunk a Guldin-féle szabályra, miért is e szabályt s bizonyítását bemutatjuk. E végből kiszámítjuk ama forgási test köbtartalmát, mely az $ABCD$ téglalapnak az XY tengely körül való forgásából keletkezik.



Ha $AD=m,\ EA=r_1,\ EB=r,\ FG=\rho$, akkor, minthogy AD és BC hengerfelületet írnak le, a köbtartalom

$$V=(r^2-r_1^2)\pi m=(r+r_1)(r-r_1)\pi m=$$

$$=2\frac{r+r_1}{2}\pi\cdot AB\cdot m=2\rho\pi t,$$

ha t a téglalap területe.

Látjuk tehát, hogy *a forgási test köbtartalmát megkapjuk, ha a súlypont által leírt utat megszorozzuk a forgó idom területével.*

Ha a forgó idom több téglalapból tehető össze, melyeknek területei $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ldots,$ a megfelelő súlypontok távolsága XY-tól pedig $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4,\ldots,$ akkor

$$v=2\rho_1\pi t_1+2\rho_2\pi t_2+3\rho_3\pi t_3+\ldots$$

vagy

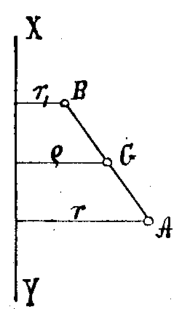
$$v=2\pi(\rho_1 t_1+\rho_2 t_2+\rho_3 t_3+\ldots)$$

De minthogy a zárójelben levő nyomatékok öszszege ρt, hol t az egész idom területe, ρ pedig a súlypontjának távolsága XY-tól, azért ismét:

$$v=2\rho\pi t.$$

A tétel minden síkidomra alkalmazható, mert minden síkidom tetszésszerinti pontossággal szétbontható csupa apró téglalapra.

E szabály a forgási testek *fölületének* meghatározására is szolgál.



Ha pl. AB egyenes forog XY tengely körül, akkor a keletkező kúpfölület területe:

$$F=(r+r_1)\pi\cdot AB=2\frac{r+r_1}{2}\pi\cdot AB=2\rho\pi\cdot AB.$$

Látjuk tehát, hogy *a súlypont útját meg kell szoroznunk a forgó egyenes hosszúságával.*

A tétel könnyen bizonyítható akkor is, ha egy tetszésszerinti vonal forog. (L. Holzmüller: Elementar-Mathematik.)

E szabályt már *Pappus* is ismerte; behatóbban foglalkozott vele *Guldin Habakuk Pál (1577-1643) De centro gravitatis* czímű munkájában.

E szabályt alkalmazva, könnyen oldhatjuk meg a következő feladatot:

833. *Adva van az általános trapéz két párhuzamos oldala a és b, továbbá a magassága m. Meghatározandó a trapéz súlypontjának a távolsága az egyik párhuzamos oldaltól.*

Ebben az esetben

$$V=\frac{a+b}{2}m\cdot 2d\pi,$$

ha d a súlypont távolsága b-től. De ha a trapéz b körül forog ($b > a$), akkor:

$$V = am^2\pi + \frac{b-a}{3}m^2\pi - m^2\pi\frac{b+2a}{3}$$

s így

$$\frac{a+b}{2}m \cdot 2d\pi = m^2\pi\frac{b+2a}{3},$$

miből

$$d = \frac{m(b+2a)}{3(a+b)}$$

(Lázár Lajos, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bayer B., Bogdán G., König D., Lukhaub Gy., Póka Gy., Scharff J., Sasvári J.

$\sin 18^\circ,\ \cos 18^\circ$. Megmutatjuk, hogy hogyan számíthatók ki a $\cos 18^\circ$ szög függvényei, a megfelelő szabályos sokszög oldalhosszának ismerete nélkül.

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$$

$$\cos 18^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ,$$

tehát

(1) $$4\sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1.$$

Minthogy pedig

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

azért

(2) $$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

legyen most $2\sin 18^\circ = x,\ 2\cos 36^\circ = y$, akkor (1) és (2)-ből:

$$xy = 1$$

$$y + x^2 = 2,$$

mely egyenletekből

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

vagy

$$x(x^2-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)[x(x+1)-1] = 0,$$

miből

$$x^2 + x - 1 = 0$$

s így

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Tehát

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\ \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}.$$