Eme érintési föladat határozatlan, azaz végtelen sok oly kör van, melyek az adottakat érintik. Mindeme körök középpontjainak elhelyezkedésénél kell, hogy bizonyos szabályszerűség létezzék. Keressük e *középpontok mértani helyét.*

Lássuk mindenekelőtt, hogy hányféle mértani helyről lehet általában itt szó? Ezek száma az adott körök egymáshoz való helyzetétől függ. De két kör kölcsönös helyzete lehet olyan, hogy azok egymást átmetszik, egymást nem metszik és egymást érintik; az egymást nem metsző körök egyike lehet a másikán kívül vagy belül; az érintés is kétféleképpen lehetséges a szerint, a mint az adott körök egyike a másikon kívül marad, vagy pedig egyik a másikat körülveszi.

Így tehát föladatunk öt különböző esetre terjed ki.

Egy a föltételeknek eleget tevő kör középpontjának meghatározása a következőképpen történik. –l. ábra. – Az adott köröknek egyik S hasonlósági pontjából tetszőleges, a köröket átmetsző egyenest húzunk.

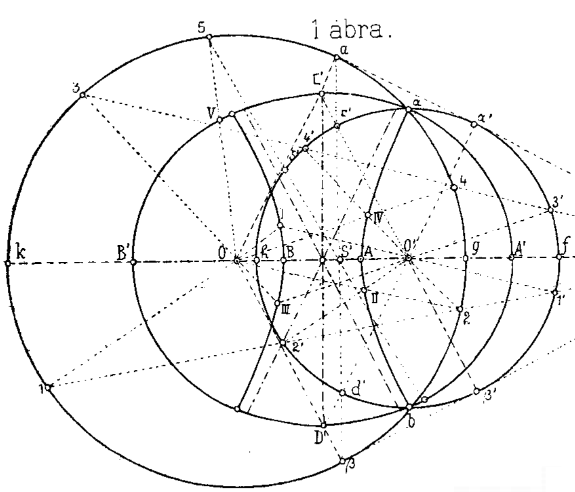
Ez az O középpontú kört $1,\ 2$, az O' középpontút $2',\ 1'$ pontokban metszi; e pontokat a megfelelő körök középpontjaival összekötjük; eme egyenesek közül az egymással nem párhuzamos egyenespárak metszéspontjai egy-egy érintő kör középpontját szolgáltatják. Így pl. az $O1$ és $O'1'$ egyenesek I metszéspontja oly kör középpontja, mely az adottakat az 1 és $1'$ pontokban – tehát a domború oldalon érinti – és őket körülveszi; holott az $O2$ és $O'2'$ egyenesek metszése által oly, az adott köröket 2 és $2'$ pontokban – a homorú oldalon – érintő kör középpontját nyerjük, mely az adottakon egészen belül marad.

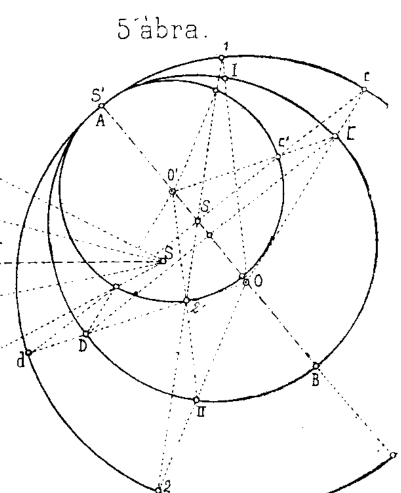
Hasonlóan használható föl a másik hasonlósági pont is. Itt azonban azt látjuk, hogy az eme hasonlósági pont segítségével előállítható körök mindegyike az adott körök egyikét belülről – a homorú oldalon, – a másikét pedig kívülről – a domború oldalon – érinti. Ilyen kör középpontja pl. V. – A szerint, a mint a hasonlósági pontokból más és más irányú egyeneseket rajzolunk, állíthatók elő különböző érintő körök, vagyis a kitűzött föladatnak végtelen sok megoldása van.

A föloldásokat képező körök az előbb említettek szerint háromfélék a szerint, a mint az adottak mindegyikét kívül, vagy mindegyikét belül, vagy az egyiket kívül, a másikat pedig belül érintik. Így tehát az elősorolt öt eset mindegyikénél három mértani hely fordulna elő. Azonban a következőkből ki fog derülni, hogy oly körök középpontjai, melyek az adottakat egyértelműen, azaz mindegyikét vagy belül vagy kívül érintik – melyeknek előállításánál tehát a külső hasonlósági pont szerepel – nem helyezkednek el két különböző, hanem csak egy vonalon; míg ama körök középpontjai, melyek mindegyike az adottak egyikét belül, másikét pedig kívül érinti, – melyek tehát a belső hasonlósági pont segítségével nyerhetők – egy másik vonalon fekszenek. Mindössze tehát tíz mértani helyről szólhatunk.

Vegyük most az említett öt esetet tárgyalás alá.

(a) 1. ábra. *A két adott kör egymást átmetszi.*





Vizsgáljuk a föltüntetett két mértani hely egymáshoz való viszonyát, tulajdonságait és jellemző részeit.

Az ábra egyszerű megtekintéséből következik, hogy

$$1I = R + OI,$$

$$1'I = r + O'I,$$

ha az adott körök küllőit R és r-el jelöljük.

De

$$1I = 1'I,$$

mint az I középponti érintő kör küllője, tehát

$$R + OI = r + O'I$$

és

(1) $$O'I - OI = R - r = \text{const.}$$

Hasonlóan:

$$V5 = R - OV$$
$$V5' = O'V - r$$

és minthogy itt is

$$V5 = V5'$$

mint az V középpontú kör küllője, tehát

$$OV + O'V = R + r = \text{const.} \tag{2}$$

Az (1) alatt levő egyenlet azt jelenti, hogy mindazok a pontok, melyeket az adott körök külső hasonlósági pontjának segítségével állíthatunk elő, ama szerkesztés útján, mint a hogy az I pontot nyertük, oly szabályszerűségnek hódolnak, hogy a két adott kör középpontjaitól mért távolságaiknak különbsége mindíg egy és ugyanazt az állandó mennyiséget $(= R - r)$ adja.

A (2) alatt levő egyenletnek meg az a jelentősége, hogy a belső hasonlósági pont segítségével szerkesztett minden pont – mint a milyen az V pont – távolságainak összege az adott körök középpontjaitól egy állandó mennyiséggel $(= R + r)$ egyenlő.

E szerint az *első mértani hely,* melynek egyik pontja I, *hyperbola,* melynek O és O' a gyújtó pontjai és valós tengelye $= R - r$. A *másik mértani hely* pedig, melynek egyik pontja V, oly *ellipsis*, melynek gyújtópontjai O és O' és nagy tengelye $= R + r$. Vagyis *e két mértani hely confocalis kúpszeletek.*

E kúpszeletek csúcspontjait még így is nyerhetjük: minthogy a hyperbola valós, illetőleg az ellipsis nagy tengelye a gyújtópontokat tartalmazza, azért a gh és kf, illetőleg hk és gf távolságok felezése által a hyperbola, illetőleg ellipsis csúcspontjait nyerjük – AB és $A'B'$ –.

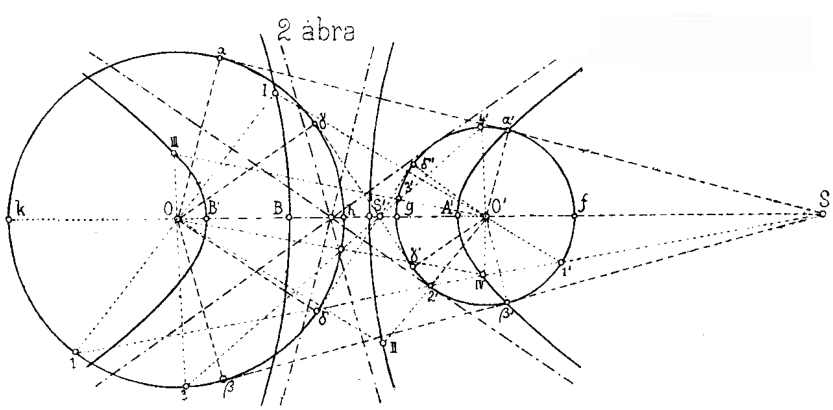
Az ellipsis kis tengelye végső pontjainak – C', D', – szerkesztésénél vegyük az S' ponton áthaladó hasonló irányú $c'd'$ segédegyenest szemügyre.

A hyperbola assymptotáinak szerkesztésénél gondoljuk meg, hogy az adott köröknek a külső hasonlósági ponton áthaladó külső érintői oly egymással párhuzamos Oa, $O'a'$ és $O\beta$, $O'\beta'$ egyenespárakra vezetnek, melyeknek a végtelenben levő metszéspontjai is az illető mértani helyen feküsznek. Vagyis: a hyperbola assymptotáit az egyenespárakkal párhuzamosan meghúzhatjuk a kúpszelet középpontján át.

Megjegyezzük még, hogy ama körök középpontjai, melyek az adottak mindegyikét belülről érintik, az aAb hyperbola ágon fekszenek ; az érintési pontok az agb és ahb köríveken vannak. Az a és b pontokon túl az adott körök közös terén kívül levő pontjai e hyperbola ágnak a végtelenig oly körök középpontjai, melyek az adottakat az $a\alpha$, $a\alpha'$ és $b\beta$, $b\beta'$ köríveken, de kívülről érintik. A hyperbola másik ága oly körök középpontjainak mértani helye, melyek az adottakat az $ak\beta$ és $a'f\beta'$ íveken, de kívülröl, érintik. Ama körök, melyeknek középpontjai az ellipsisen vannak, mint már említettük, az adottak egyikét kívülről, másikát belülről érintik.

A mértani helyek a köröknek a és b közös pontjain is átmennek. Az OaO' szöget felező egyenes a hyperbolának érintője ; mig a $(180° - OaO')$ szöget felező egyenes ugyane pontban az ellipsist érinti. Következőleg: ha két confocalis kúpszelet közös pontokkal bír (metszés esetében az egyik ellipsis, a másik hyperbola), akkor egymást derékszög alatt metszik.

(b) 2. ábra. *Az adott körök nem metszik egymást és egymáson kivül vannak.*

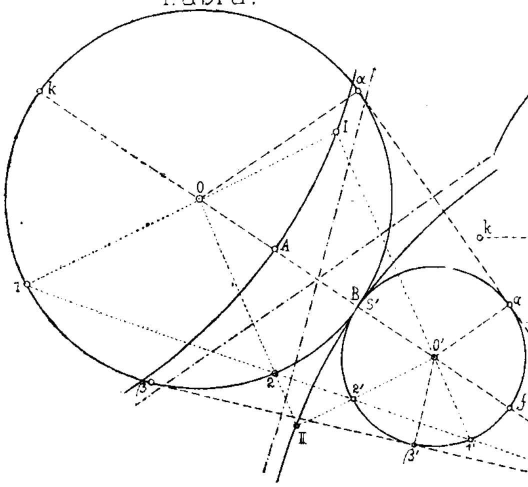


Ez esetben *a két mértani hely mindegyike hyperbola.* A közös gyújtópontokra, assymptotákra és valós tengelyekre tett megjegyzések itt is, valamint a még következö eseteknél is érvényesek. Itt valamennyi kör az adottakat kivülről érinti, de a viszonyok másképpen alakulnak, mint az (a) esetben. Ugyanis az S külső hasonlósági pontnak megfelelő hyperbola assymptotái párhuzamosak $O\alpha$ és $O\beta$-hoz, AB a valós tengely. Az IB ág oly körök középpontjait (egy ilyen pont az I középpont) foglalja magában, melyek az adottakat egészen körülfogják és az érintési pontok az $ak\beta$ és $a'f\beta'$ köríveken vannak. E hyperbola másik ága pedig mértani helye ama körök középpontjainak, melyek az adott körök egyikét sem fogják körül és őket az $ah\beta$ és $a'g'\beta'$ köríveken érintik (egy ilyen pont a II. középpont).

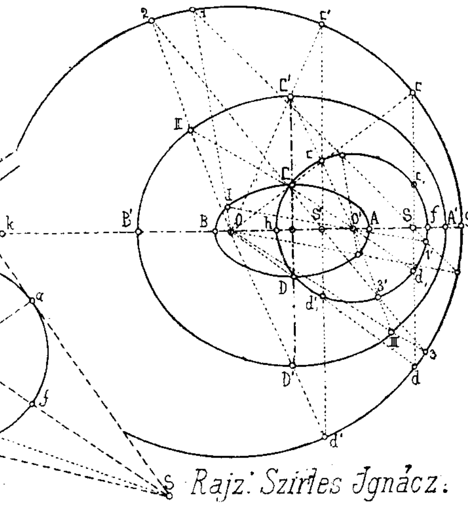
Az S' belső hasonlósági pontnak megfelelő hyperbola assymptotái párhuzamosak az $O\gamma$ és $O\delta$-hoz (γ és δ az adott körök közös belső érintőinek érintéspontjai), valós tengelye $A'B'$. $AIIIB'$ ágban találjuk ama körök középpontjait (egy ilyen a III. pont), melyek a közelebbi O középpontú kört körülfogják, míg a távolabbi O' középpontú kört nem fogják körül; az érintési pontok e szerint a $\gamma k\delta$ és $\gamma k' g\delta$, köríveken vannak. E hyperbola másik ága pedig ama körök középpontjainak képezi mértani helyét (pl. IV. pont), melyek a közelebbi O' kört körülfogják és a O kört nem fogják körül; az érintési pontok a $\gamma' f\delta'$ és $\gamma h\delta$ köríveken vannak.

(c) 3. ábra. *Az adott körök nem metszik egymást (és egyik kör a másikon belül van.* Ebben az esetben egyik hasonlósági pontból sem lehet a körökhöz érintőket szerkeszteni, tehát *mind a két mértani hely ellipsis.* Az S hasonlósági pont segítségével előállítható ellipsis tengelyei AB és CD. Ama körök, melyeknek középpontjait (ilyen az I pont) ez az ellipsis tartalmazza, az O középpontú kört a homorú, az O' középpontút pedig a domború oldalon érintik. Az érintési viszonyok ugyanilyenek a másik körrendszernél is.

4. ábra.



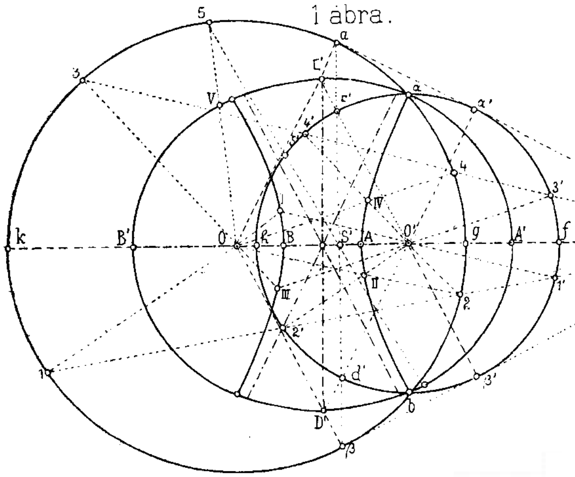
3. ábra.



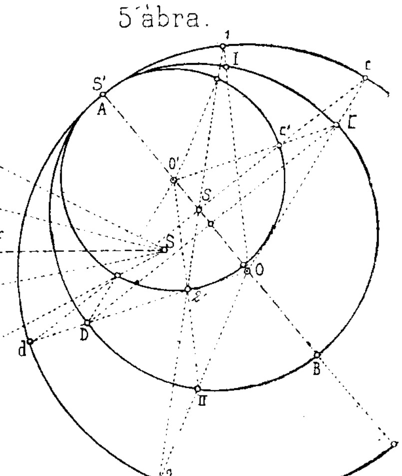
(d) 4. ábra. *Az adott körök úgy érintkeznek, hogy egyik kör a másikon kívül marad.* A külső hasonlósági pontnak megfelelő *hyperbola* egyik csúcspontja a körök közös érintési pontja. Ama körök középpontjai, melyek az adottakat az $aS'\beta$ és $a'S'\beta'$ körívek pontjaiban érintik, a IIS' hyperbola ágban vannak, e körök az adottakat nem fogják körül. A hyperbola másik ágában pedig oly körök középpontjai vannak, melyek az adottakat körülfogják; az érintési pontok az $ak\beta$ és $a'f\beta'$ köríveken vannak. *A másik mértani hely, az OO' egyenes és a megfelelő körök az adottakat a közös B pontban érintik.* mert az O és O'-ból kiinduló megfelelő sugarak ez esetben párhuzamosak egymással.

(e) 5. ábra. *Az adott körök érintkeznek és egyik a másikon belül marad.*

1 ábra.



5 ábra.



Az S hasonlósági pontnak megfelelő kúpszelet az AB és CD tengelyekkel bíró *ellipsis. A másik mértani hely* ismét az OO' egyenes.