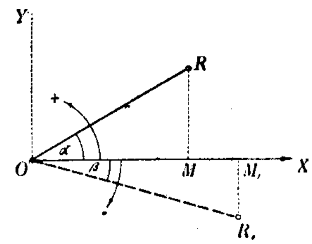
I. Coordinata rendszerek a síkban.

C)*Sarkcoordináták.*

Ha a síkban valamely O szilárd pontot választunk, és az O pontból úgynevezett OX félsugarat húzunk, akkor a sík R pontjának a helyzetét tudjuk, ha egyrészt az R pontnak O ponttól való ρ távolságát, másrészt pedig a szöget ismerjük, melyet az $OR = \rho$ távolság az OX félsugárral alkot. (16. ábra.)



16. ábra

az OX félsugarat *sarktengely*nek, az O pontot *sark*nak; az $OR = \rho$ távolságát *radius vector*nak és az α szöget *sarkszög*nek nevezzük. A radiusvector és a sarkszög alkotják a pont *sarkcoordinátáit.*

A radius vectort csak absolut értékében szoktuk számításha venni; a sarkszöget azonban, a sarktengelytől számítva az óramutató járásával ellenkező irányban positívnak, vele megegyező irányban pedig negatívnak vesszük.

(Az ábrában látható R pontnak sarkszöge $+$; az R_1 ponté $-$).

Az R pont sarkcoordinátáiból könnyű szerrel megtalálhatjuk ugyanannak a pontnak a Cartesius-féle derékszögű coordinátáit és viszont. Ha ugyanis a sarkrendszert olvan derékszögű rendszerrel hozzuk kapcsolatba, melynek kezdőpontját az O sarkpontban választjuk és melynek abscissa tengelye a sarktengelyt födi, akkor az $ROM\triangle$-ből

$$\frac{RM}{OR} = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \frac{OM}{RM} = \cos\alpha;$$

vagyis

$$y = \rho\sin\alpha \quad \text{és} \quad x = \rho\cos\alpha, \quad \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ezen kapcsolatok alapján szoktuk az egyenleteket transformálni.

D)*Homogén coordináták.*

Parallel coordinátákra vonatkozó egyenleteken gyakran láthatjuk, hogy ha egyes tagjaiban a bennök előforduló változóknak (ismeretleneknek) hatványkitevőit összeadjuk, az összeg nem minden egyes tagban egyenlő.

Sőt azokban az egyenletekben olyan tagokat (v. tagot) is lelünk, melyek a változókat éppenséggel nem tartalmazzák (más szóval, melyekben a változók az 0-adik hatványban fordulnak elő.)

Parallel coordinátákban tehát az egyenlet egyes tagjai rendszerint különböző méretűek. Az egyenletek *heterogén* jellegűek. (Ilyen pl. az $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \rho^2 = 0$; benne az első és a második tag kétméretű, a harmadik egyméretű, a negyedik és az ötödik absolut tagok.)

Homogén coordinátákban az egyenletek más szerkezetűek. Az *egyenletek homogének.* Homogénnek azt az egyenletet nevezzük, melynek minden egyes tagjában a változók hatványkitevőinek összege egyenlő. Homogén egyenletnek nincsen absolut tagja. Homogén pl. $ax_1^2+2bx_1x_2+2cx_1x_3+dx_2^2+2ex_2x_3+fx_3^2 = 0$ egyenlet. Benne minden egyes tag kétméretű.

A homogén coordinátáknak ez nagy előnyt biztosít, mert a homogén egyenletek általánosabb jellegű tételek levezetésére alkalmasabbak.

Az a körülmény, hogy bármely nem homogén egyenletet egyszerű transformatiók alapján homogénné lehet tenni, tájékoztatást nyújt egyrészt a parallel és a homogén coordináták közti összefüggésről, másrészt megjelöli az utat, melyen haladnunk kell, ha egyik rendszerről a másikra át akarunk térni. A tudósok kimutatták, hogy a két rendszer között lévő kapcsolat annyira szoros, hogy a parallel coordináták a homogéneknek tulajdonképpen csak speciális esetét képezik.

*

A homogén coordinátákban is megkülönböztetünk *pont- és vonalcoordinátákat.*

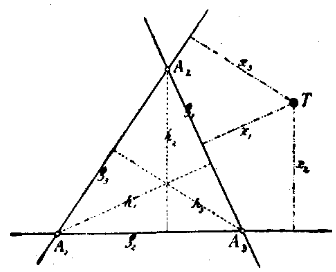
Homogén pontcoordináták és homogén vonalcoordináták között ugyanaz a különbség, de ugyanaz az összefüggés is van, mint a közönséges pont- és vonalcoordináták között.

A szoros kapcsolat az elemek dualitása.

A rendszerek tényleges bemutatása előtt most mindenek előtt pillantást kellene vetni az eszmék ama egyszerű de szép és érdekes menetére, mely a homogén coordináták fölépítésére vezetett. Mind a mellett mellőzhetem a jelen esetben a részletesebb bevezető magyarázatokat, mert *Arany Dániel* ugyan e helyen (a III. évf. 3. és 4. számában) *"a hely meghatározásról a síkban"* cz. a. közölt két czikkében a homogén coordináta rendszerek lényegét ismertette. Midőn tehát ama két czikkre való hivatkozással csak a rendszerek bemutatására szorítkozom, fölhívom a tárgy iránt érdeklődők figyelmét dr. *W. Fiedler "Die darstellende Geometrie"* czímű jeles munkájának III. kötetére. *"Die construirende und analytische Geometrie der Lage"*. E jeles mű a homogén (projectiv) coordináta rendszerek származtatásának egész menetéről minden tekintetben alapos útbaigazítást ad.

1. A pont homogén coordinítái. (Homogén pontcoordináták.)

Ha a síkban valamely $A_1A_2A_3$ szilárd coordináta háromszöget választunk, akkor a sík összes pontjait a háromszög három oldalához viszonyíthatjuk. (17. ábra.)



17. ábra

A pont coordinátái alatt ugyanis a pontnak a háromszög oldalaitól mért merőleges távolságait értjük.

Az A_2A_3, A_3A_1 és A_1A_2 oldalak a rendszer tengelyei.

Jelöljük a T pontnak a tengelyektől való távolságait rendre x_1-gyel, x_2-vel és x_3-mal; akkor x_1x_2 és x_3 értékeket a *pont trimetrikus (homogén) coordinátái*nak nevezzük.

Ha a háromszög oldalait a csúcsokon túl meghosszabbítjuk, a három egyenes (tengely) az egész síkot *hét* részre osztja. Ha a T pont nem pontja a tengelyeknek, akkor bizonyára a hét síkrész egyikében fekszik. Erre való tekintettel nem elegendő, ha a három coordinátának csak absolut értékét ismerjük, hanem a pont teljes meghatározásának czéljából a coordinátákat előjellel látjuk el.

Nevezetesen:

ha a T pont és az A_1 csúcs az A_2A_3 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_1 positív,

ha a T pont és az A_2 csúcs az A_3A_1 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_2 positiv,

ha a T pont és az A_3 csúcs az A_1A_2 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_3 positiv.

Ellenkező esetben a coordináták negativ előjelűek.

(A 17. ábrában x_2 és x_3 positív, ellenben x_1 negatív. Ha a T pont a coordináta háromszögön belül feküdnék, akkor mind a három coordinátája positív volna.)

Ha a háromszög oldalait g_1-gyel, g_2-vel, g_3-mal; nemkülönben a háromszög *kétszeres* területét $\triangle$-val jelöljük, akkor a coordináták közti összefüggést a $g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 = \triangle$ egyenlet fejezi ki.

(Ennek az egyenletnek a helyességéről könnyű szerrel meggyőződhetünk. Lásd a 17. ábrát.)

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög három csúcsának a coordináláit h_1-gyel, h_2-vel és h_3-mal jelöljük, nemkülönben figyelembe vesszük, hogy $g_1h_1 = \triangle$; $\quad g_2h_2 = \triangle$, $\quad g_3h_3 = \triangle$ vagyis

$$\frac{g_1}{\triangle} = \frac{1}{h_1}; \quad \frac{g_2}{\triangle} = \frac{1}{h_2}; \quad \frac{g_3}{\triangle} = \frac{1}{h_3},$$

ekkor a fönti egyenletet így írhatjuk :

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Ezért bátran mondhatjuk, hogy az x_1, x_2 és x_3 számokat csak akkor tekinthetjük a T pont homogén coordinatáinak, ha az

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$$

lineáris egyenletnek eleget tesznek.

Az ábra szemléléséből közvetetlenül meggyőződhetünk, hogy a háromszög három csúcsának a coordinátái a következők

$$\begin{array}{llllll}
\text{Az} & A_1 & \text{csúcsé:} & x_1 = h_1; & x_2 = 0; & x_3 = 0, \\
\text{"} & A_2 & \text{"} & x_1 = 0; & x_2 = h_2; & x_3 = 0, \\
\text{"} & A_3 & \text{"} & x_1 = 0; & x_2 = 0; & x_3 = h_3.
\end{array}$$

A coordináták értékei szempontjából érdekesek a háromszög úgynevezett "főpontjai". Azok közül a háromszögbe írható (ρ sugarú) kör középpontjának coordinátái:

$$x_1 = \rho_1; \quad x_2 = \rho_2; \quad x_3 = \rho_3.$$

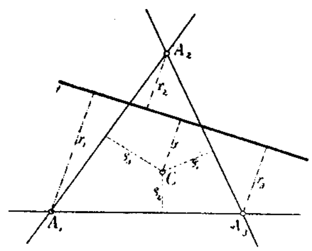
A háromszög súlypontjának coordinátái :

$$x - 1 = \frac{h_1}{3}; \quad x_2 = \frac{h_2}{3}; \quad x_3 = \frac{h_3}{3}.$$

Az $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{3} = 1$ egyenletet érdekessé teszi az a körülmény, hogy vele az $x_1,\ x_2,\ x_3$ coordinátákra vonatkozó nem homogén egyenleteket homogénné lehet tenni.

2. Az egyenes vonal homogén coordinítái. (Homogén vonalcoordináták.)

Ha a coordináta-háromszög három csúcsából a t egyenesre merőlegest ejtünk, továbbá a síkban tetszés szerint valamely C pontot választunk, belőle is a t egyenesre merőlegest ejtünk, és ha a csúcspontokból ejtett merőlegeseknek mértékszámait egyenkint a C pontból ejtett merőlegesnek mértékszámával elosztjuk, akkor a három hányadost *az egyenes vonal három homogén coordinátájának* tekinthetjük.



18. ábra

Ha az	A_1	pont	távolságát	t-től	r_1-gyel	jelöljük,
"	A_2	"	"	"	r_2-vel	"
"	A_3	"	"	"	r_3-mal	"

akkor a t egyenes vonal trimetrikus homogén coordinátái:

$$\frac{r_1}{r} = u_1; \quad \frac{r_2}{r} = u_2; \quad \frac{r_3}{r} = u_3.$$

Itt is tekintetbe veszszük az előjelet. Nevezetesen:

u_1-et	positívnak	vesszük	ha	A_1	és	C	a	t egyenes	ugyanazon	oldalán	fekszik,
u_2-t	"	"	"	A_2	"	C	"	"	"	"	"
u_3-t	"	"	"	A_3	"	C	"	"	"	"	"

ellenkező esetben a coordináták negatív előjelűek.

(A 18. ábrában u_1 és u_3 positív; u_2 negatív. Ha a t egyenes nem metszi a coordinata háromszöget és a C pontot a háromszögön belül választjuk, akkor mind a három coordinata positív.)

Jelöljük a C pont coordinátáit (távolságait a háromszög oldalaitól, tehát pontcoordindruáláit) ρ_1-gyel, ρ_2-vel, ρ_3-mal, akkor a coordináta háromszög három oldalának coordinátái:

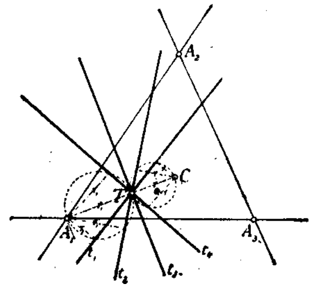
$$\begin{array}{lllllll}
A_2A_3 & \text{oldalé} & u_1 = \dfrac{h_1}{\rho_1}; & u_2 = 0; & u_3 = 0; & \text{mert} & \left\{\begin{array}{c} r_1 = h_1 \\ r = \rho_1 \end{array}\right\} \\
A_3A_1 & \text{"} & u_1 = 0; & u_2 = \dfrac{h_2}{\rho_2}; & u_3 = 0; & \text{mert} & \left\{\begin{array}{c} r_2 = h_2 \\ r = \rho_2 \end{array}\right\} \\
A_1A_2 & \text{"} & u_1 = 0; & u_2 = 0; & u_3 = \dfrac{h_3}{\rho_3}; & \text{mert} & \left\{\begin{array}{c} r_3 = h_3 \\ r = \rho_3 \end{array}\right\}
\end{array}$$

*

A különböző helyzetű és irányú egyeneseknek a coordinátái rendszerint különböző értékűek.

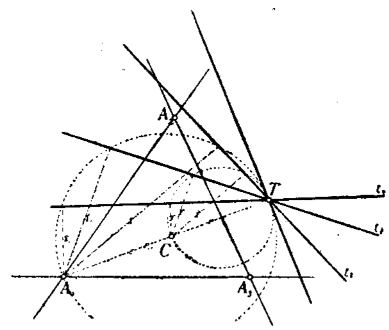
Azonban, ha két vagy több egyenesnek egy közös coordinátája van, ez annak a jele, hogy az egyeneseknek közös pontjuk van. Ha pl. a $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots$ egyenesek coordinátái közül u_1 közös értékű, akkor a T pont rajta van az A_1 és C pontokat összekötő egyenesen és az A_1C távolságot az $\frac{A_1T}{CT} = \pm u_1$ viszonyban osztja.

Ha a T pont az A_1C távolságon belül fekszik, akkor a coordináta $-$ előjelű (19. ábra).



19. ábra

Ha az A_1C távolságon kívül esik, + előjelű (20. ábra).



20. ábra

Az első esetben az A_1-ből és a C-ből az egyenesekre ejtett merőlegeseknek talppontjai olyan körökön feküsznek, melyek T-ben kívülről érintkeznek. A második esetben a körök – a talppontok geometriai helyei – belülről érintkeznek.)

Ha a $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots$ egyeneseknek coordinátái közül u_2 közös, akkor T metszőpontjuk az A_2C egyenesen van. A közös coordináta viszonyszáma $\dfrac{A_2T}{CT} = \pm u_2$.

Ha végre u_3 közös, akkor a T rajta van az A_3C egyenesen. A viszonyszám $\dfrac{A_3T}{CT} = \pm u_3$.

Az esetek bármelyikében a $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots$ egyenesek a T pontot beburkolják. (Enveloppjai a közös metsző pontjuknak.)

Megjegyezhetjük még, hogy mindazoknak az egyeneseknek, melyek a szilárd C ponton áthaladnak, coordinatái:

$$u_1 = \pm\infty, \quad u_2 = \pm\infty, \quad u_3 = \pm\infty.$$

*

Ha a homogén vonalcoordináta-rendszerben is a háromszög kétszeres területét $\triangle$-val jelöljük, akkor valamely egyenes vonal három homogén coordinátáját a következő egyenlettel kapcsolhatjuk össze:

$$g_1\rho_1u_1 + g_2\rho_2u_2 + g_3\rho_3u_3 = \triangle.$$

Tekintettel arra, hogy $g_1h_1 = \triangle,\ g_2h_2 = \triangle$, stb. vagyis $\dfrac{g_1}{\triangle} = \dfrac{1}{h_1}$, stb. az egyenletet így is írhatjuk:

$$\frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 = 1$$

és mondhatjuk, hogy az $u_1,\ u_2,\ u_3$ számok csak abban az esetben homogén coordinátái valamely t egyenesnek, ha ennek a lineáris egyenletnek eleget tesznek.

Különös jelentőséget nyer ez az egyenlet azzal, hogy vele az $u_1,\ u_2,\ u_3$ vonalcoordinátákra vonatkoztatott bárminő fokú nem homogén egyenleteket homogénekké lehet átalakítani.

*

A homogén pont- és vonalcoordinaták kölcsönös összefüggéséről nyújtson némi fogalmat a következők párhuzamba állítása.

Azt a föltételt, hogy valamely T pont, valamely t egyenesen van, vagy megfordítva valamely t egyenes valamely T ponton áthalad, a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{1}{h_1}u_1x_1 + \frac{1}{h_2}u_2x_2 + \frac{1}{h_3}u_3x_3 = 0.$$

Ennek az egyenletnek kettős jelentősége van. Jelentősége van úgy pontcoordinátákban, mint vonalcoordinátákban. Ugyanis:

Ha benne a t egyenes coordinátáit ismerjük, akkor az egyenletet így írhatjuk:
$\left(\frac{u_1}{h_1}\right)x_1 + \left(\frac{u_2}{h_2}\right)x_2 + \left(\frac{u_3}{h_3}\right)x_3 = 0,$
vagy rövidebben:
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$
Ez a homogén vonalas egyenlet homogén pontcoordinátákban az egyenes vonalnak az egyenlete.

*

Homogén pontcoordinátákban a másodrendű görbéknek az egyenlete:
$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 +$
$+ 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$

Ha benne a T pont coordinátáit ismerjük, akkor az egyenletet így írhatjuk:
$\left(\frac{x_1}{h_1}\right)u_1 + \left(\frac{x_2}{h_2}\right)u_2 + \left(\frac{x_3}{h_3}\right)u_3 = 0,$
vagyis rövidebben:
$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$
Ez a homogén vonalas egyenlet homogén vonalcoordinátákban az egyenes pontnak az egyenlete.

*

Homogén vonalcoordinátákban a másodosztályú görbéknek az egyenlete:
$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + a_{22}u_2^2 +$
$+ 2a_{22}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0.$