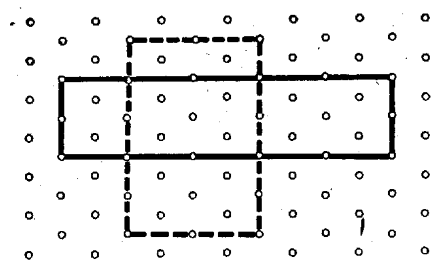
[1] **I. megoldás.** A háromszögrács két szomszédos szabályos háromszöge 60°-os hegyes szögű rombuszt alkot d és $d\sqrt{3}$ hosszú átlókkal, melyek egymásra merőlegesek. Tehát a rács minden olyan rácsegyeneséhez[2], melyen a rácspontok távolsága d, van rá merőleges rácsegyenes is, és ezen a rácsállandó $d\sqrt{3}$. Minden d és $d\sqrt{3}$ oldalú rácstéglalap belsejében egy rácspont van, a középpont.



Legyen az elhatárolt téglalap két oldala bd és $cd\sqrt{3}$, ahol b és c természetes szám. Így az oldalakon b, c, b, c számú fa áll (a körüljárásban mindegyik oldalhoz a kezdőpontot hozzászámítva, a végpontot nem), összesen $2(b+c)$ fa. A határmenti rácspontok szemközti párjait összekötő egyenesek az erdőrészletet bc számú, d, $d\sqrt{3}$ oldalú téglalapra bontják, mindegyik közepén áll egy fa, és az egyenesek $(b-1)(c-1)$ számú belső metszéspontján egy–egy fa. Ezzel valamennyi belső fát számításba vettünk, számuk $bc+(b-1)(c-1)$. A kérdés tehát ez: van-e olyan b, c természetes számpár, amelyre

$$2(b+c)=bc+(b-1)(c-1). \tag{1}$$

Innen
$$b=\frac{3c-1}{2c-3}=1+\frac{c+2}{2c-3}.$$
Mivel $c+2$ pozitív, azért $2c-3$ is, tehát $c>3/2$, és mivel c egész, így $c \geqq 2$. Másrészt a jobb oldal második tagjára
$$\frac{c+2}{2c-3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2c+4}{2c-3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{2c-3)}\right).$$
Az utolsó zárójelben a második tagnak páratlan egész számnak kell lennie. Ez 1-nél nagyobb egész c-re csak úgy lehet, ha a nevező 1 vagy 7. Innen $c_1=2$ és $c_2=5$, $b_1=5$ és $b_2=2$, *tehát a követelmény teljesíthető.*

A két megoldás alakra különböző, de egyenlő területű erdőrészletet ad, ugyanis a hosszabb oldal $5:2\sqrt{3}\approx 1{,}44$-szor, ill. $5\sqrt{3}:2\approx 4{,}33$-szor akkora, mint a rövidebb, a terület viszont mindkétszer $bcd^2\sqrt{3}=10\sqrt{3}d^2$. (Az ábrából látjuk, hogy egyik oldaluk mentén nyújtva egymásba átvihetők.)

Seprődi László (Budapest, Fáy A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Ha (1) szimmetriáját feláldozva $c=b+e$-t írunk (ahol e egész), b-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$2b^2+2(e-3)b+(1-3e)=0. \tag{2}$$

Innen b csak akkor racionális, ha a diszkrimináns teljes négyzet:

$$4(e-3)^2-8(1-3e)=4(e^2+7),$$

tehát ha $e^2+7=f^2$, ahol f egész. Így $f^2-e^2=(f-e)(f+e)=7$, tehát $f-e=7/(f+e)$, és az I. megoldáshoz hasonlóan $e=\pm 3$ és $|f|=4$. Most már e két értékével (2)-ből pozitív megoldásként ismét a b, $c=2$, 5 értékpár adódik.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) összefüggést tagokra bontva, 0-ra redukálva, majd 2-vel szorozva az ismeretleneket tartalmazó tagokat szorzatba foglalhatjuk össze:

$$\begin{gathered}2bc-3b-3c+1=0,\\ 4bc-6b-6c+2=2b(2c-3)-3(2c-3)-7=0,\\ (2b-3)(2c-3)=7.\end{gathered}$$

Ebből az I. megoldáshoz hasonlóan következtethetünk tovább.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

---

[1] Az eredeti kitűzés zárójeles megjegyzését töröltük. – *Szerk.*

[2] Rácsegyenes minden olyan egyenes, amely két (és akkor már végtelen sok) rácsponton megy át.

2. Többen abból indultak ki, hogy „kicsi” rácstéglalap belsejében kevesebb a rácspont, mint a kerületén, „nagy” téglalapnál viszont benn van többlet. Megfigyelték ezután a belső rácspontszám növekedését, ha az egyik oldalt növeljük, és így eljutottak egyik, esetleg mindkét megoldáshoz. Dolgozatukból azonban nem derül ki, hogy van-e további megoldás. A feladat kérdésére ezek is igennel válaszoltak, tehát megoldásuk helyes. Ezeket a dolgozatokat 2 pontra értékeltük.

3. Az eredeti kitűzés zárójeles megjegyzésében az $ABC\triangle$-et szabályosnak kellett gondolnunk. Rögzített A és B-vel $AB=d$ mellett végtelen sok olyan C van, hogy az $ABC\triangle$-ben nincs további fa. Mindezekben a C-ből húzott magasság $d\sqrt{3}/2$.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. IV. o. t.)