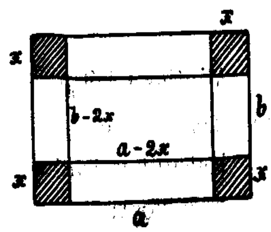
40. *Grillet módszere.* Mikor a változókat korlátozó feltételek nem engedték meg a változók egyenlőkké válását, módját adtuk annak, miképpen lehet a nehézséget megkerülni. A tételt több pozitív változó esetére általánosítván, fölemlítettük, hogy a változókat korlátozó föltételek némely esetben nem engedvén meg azt, hogy a változók egyenlőkké válhassanak, a módszer általános érvényességének is korlátokat szabnak. Ilyen esetekben *Grillet* (Nouvelles Annales de Mathematiques I. série 1. IX. et XVI.) útmutatása szerint kerülhetjük meg a nehézséget. A módszert egy érdekes feladat mégoldására fogjuk felhasználni.

41. *Téglalapalakú kartonlapból a legnagyobb térfogatú, felül nyitott skatulya készítendő.*

A téglalap sarkaiból x oldalú négyzeteket vágunk ki.



A skatulya köbtartalma

$$V = x \cdot (a-2x) \cdot (b-2x).$$

Ebben az esetben a tényezők nem válhatnak egyenlőkké; mert például

$$a-2x = b-2x$$

arra vezetne, hogy $a=b$, a mi a föltevéssel ellenkezik. A paraméteres eljárás sem vezetne czélhoz, amennyiben a megoldandó egyenlet 3-adfokú lenne.

Grillet szerint a szorzat két utolsó tényezőjét tetszésünktől függő constans együtthatókkal megszorozzuk:

$$x(a\alpha - 2\alpha x) \cdot (b\beta - 2\beta x).$$

A tényezők összege

$$x + a\alpha - 2\alpha x + b\beta - 2\beta x$$
$$= x(1-2\alpha-2\beta) + a\alpha + b\beta,$$

akkor lesz állandó értékű, vagyis x-től független, ha

$$1-2\alpha-2\beta = 0.$$

De ebben az esetben a szorzat akkor válik maximálissá, ha a tényezők egyenlők; tehát

$$x = \alpha(a-2x) = \beta(b-2x).$$

Minthogy $\alpha \neq \beta$, ebből most már nem következik az, hogy $a=b$. Ezekből az egyenletekből

$$\alpha = \frac{x}{a-2x}$$

$$\beta = \frac{x}{b-2x}$$

következik, melyeket helyettesítvén

$$1 - \frac{2x}{a-2x} - \frac{2x}{b-2x} = 0$$

származnak, vagy rendezve:

$$12x^2 - 4x(a+b) + ab = 0,$$

honnét

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Minthogy két pozitív értéket kaptunk, most még el kell döntenünk azt, hogy ezek közül melyik felel meg a feladat követelményeinek. Rajzunk szerint $a > b$.

Ennélfogva

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

absolut értéke b-nél nagyobb, s így a nagyobbik gyök $\frac{b}{2}$-nél nagyobb értékű. Ez azonban lehetetlen, mert az elvágandó négyzet oldalhosszúsága a téglalap kisebbik oldalának felénél hosszabb nem lehet.

Így tehát

$$x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

42. *A maximum-minimum feladatok reciprocitása.* Legyenek X és Y positív változó mennyiségek, melyek közt meghatározott összefüggés álljon fenn. Ha Y-nak bizonyos adott B értékére nézve X-nek A a maximuma, akkor ugyanazon körülmények között X-nek A értékére nézve Y-nak B lesz a minimuma. Hogy ez lehetséges legyen, ahhoz csupán az szükséges, hogy X-nek lehetséges maximuma Y-nal egyidejűleg csökkenhessen.

Ugyanis, ha Y-nak egy a B-nél kisebb b értéket adunk, akkor X-nek értéke a föltevés szerint A-nál kisebb lesz. Tehát ha X-nek ez A értéket adjuk, akkor Y-nak egyidejűleg bekövetkezhető összes értékei közül egy sem lehet B-nél kisebb, s így B lesz az Y-nak minimuma.

Ez a megjegyzés megengedi azt, bogy bizonyos esetekben a maximum-minimum feladatok kétféleképpen tárgyaltathassanak. Minden maximum-, vagy minimum feladatnak így illetőlegesen egy minimum- vagy maximum feladat felel meg. Ennek alapján néhány nevezetes eredményt fogunk felsorolni.

Láttuk, hogy ha n positív tényezőnek összege állandó, szorzatuk maximumát éri, ha a tényezők egymás közt egyenlők, tehát egy-egy az összegüknek n-ed részévé válik.

Közvetlenül világos, hogy ha n positív tényezőnek szorzata állandó, akkor összegük minimumát éri, a mikor a tényezők egymás közt egyenlőkké válnak, s mindegyik a szorzatuknak n-ik gyökével lesz egyenlővé.

Továbbá láttuk, hogy ha n positív változó összege állandó, akkor az

$$x^p \cdot y^q \cdot z^r \cdots t^v$$

szorzat maximumát az esetben éri, a mikor a tényezők rendre arányosak megfelelő kitevőikkel.

A megelőzők alapján közvetlenül világos, hogy ha az

$$x^p \cdot y^q \cdot z^r \cdots t^v$$

szorzat állandó, akkor az $x,\ y,\ z \ldots t$ positív változók összege minimumát éri az esetben, a mikor a tényezők megfelelő kitevőikkel arányosak.

Láttuk, hogy az adott forgás kúpba írt henger térfogata akkor maximális, a mikor a henger magassága a kúp magasságának harmadrésze, vagy a henger alapkörének küllője $\frac{2}{3}$-a a kúp alapköre küllőjének. E mellett a maximális henger köbtartalma az adott kúp köbtartalmával egyidejűleg csökkenik.

Megjegyzéseink alapján kimondhatjuk, hogy az adott körhenger körül írt forgáskúp köbtartalma akkor minimális, amikor a kúp magassága a henger magasságának 3-szorosa.

43. Mielőtt a tollat letenném, kötelességem forrásaimról (a mennyiben azt a tárgyalások folyamán meg nem tettem volna) beszámolni. E tekintetben első sorban említem *Charles de Comberousse: Cours de mathematiques I. kötetét,* továbbá *F. J.-nek Cours. d'algebre élémentaire conforme aux derniers programmes* czímű munkáját.

Abban a hitben, hogy minden a kérdésre vonatkozót áttekinthetőleg összefoglaltam, s hogy ezzel a mennyiségtan iránt érdeklődő fiatalságunknak szolgálatot tettem, a hűségesen eddig kitartott szíves olvasó figyelméért köszönetet mondva, zárom soraimat.