33. *A tétel általánosítása a változók hatványainak szorzatára. Ha két positív változó összege állandó, akkor a változók bizonyos hatványainak szorzata maximálissá válik, a mikor a tényezők a megfelelő kitevőikkel arányosak.*

Legyen $x + y = a$ és vizsgáljuk az $x^m \cdot y^n$ szorzatot. Identikusan áll:

$$x^m \cdot y^n = \frac{x^m}{m^m} \cdot \frac{y^n}{n^n} \cdot m^m \cdot n^n.$$

A jobboldalon a két utolsó tényező állandó mennyiség, s így a vizsgált szorzat maximuma az

$$\frac{x^m}{m^m} \cdot \frac{y^n}{n^n}$$

szorzat maximumával egyidejűleg fog bekövetkezni. Ezt a szorzatot így is írhatjuk:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n.$$

Utóbbi szorzatunk kétféle tényezőből áll: szám szerint m tényező mindegyike $\frac{x}{m}$, szám szerint n tényező mindegyike $\frac{x}{n}$, s a tényezők összege

$$m \cdot \frac{x}{m} + n \cdot \frac{y}{n} = x + y = a$$

állandó mennyiség. A 24. pontban mondottak szerint a szorzat akkor válik maximálissá, ha a tényezők egyenlőek, föltéve, hogy egyenlőekké válhatnak; s ekkor

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n},$$

honnét

$$x : y = m : n.$$

34. *A tétel érvényes törtkitevők esetében.* Legyen

$$m = \frac{p}{q},\ n = \frac{r}{s},$$

akkor

$$\begin{aligned} x^m \cdot y^n &= x^{\frac{p}{q}} \cdot y^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{x^p} \cdot \sqrt[s]{y^r} \\ &= \sqrt[qs]{x^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{y^{rq}} \\ &= \sqrt[qs]{x^{ps} \cdot y^{rq}}. \end{aligned}$$

A gyökmennyiség maximumát ugyanazon esetben éri, a mikor a gyökjel alatt álló szorzat; ennél pedig a maximum beálltának föltétele

$$\frac{x}{ps} = \frac{y}{rq}$$

vagy

$$\frac{qx}{p} = \frac{sy}{r}$$

s ismét

$$x : y = \frac{p}{q} : \frac{r}{s}.$$

35. *A változók hatványaira vonatkozó tétel megfordítása. Ha több positív változó hatványainak szorzata állandó mennyiség, akkor a változók összege minimálissá válik, a mikor a változók hatványkitevőikkel arányosak.*

Egyelőre két változó esetére szorítkozván, legyen

$$x^m \cdot y^n = \text{const}.$$

Ugyanígy

$$\frac{x^m \cdot y^n}{m^m \cdot n^n} = \text{const}.$$

vagyis

$$\left(\frac{x}{m}\right)\left(\frac{x}{m}\right) \dots \left(\frac{y}{n}\right)\left(\frac{y}{n}\right) \dots = \text{const}.$$

Az itt szereplő $m+n$ számú tényezö összege

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\ldots+\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\ldots=x+y.$$

De a megelőző egyenlsőg szerint az $m+n$ számú változónak szorzata állandó mennyiség, s így az $x+y$ összeg akkor válik minimálissá, ha a változók – föltéve, hogy ez lehetséges – egyenlők, vagyis, ha

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Az általános esetre való kiterjesztés egészen így történik.

36. *Föltéve, hogy $ax^m+by^n=const.$, vizsgáljuk meg, mikor válik az $x^m\cdot y^n$ szorzat maximálissá?*

Az $x^m\cdot y^n$ szorzat az

$$abx^m\cdot y^n$$

szorzattal egyidejűleg válik maximálissá, mi mellett ab positívnak vétetik

$$abx^my^n=ax^m\cdot by^n.$$

A két tényező összege állandó lévén, a szorzat maximumának

$$ax^m=by^n$$

a föltétele.

37. *Föltéve, hogy $x+y+z=const.$, vizsgáljuk meg, mikor válik az*

$$(ax+\alpha)(by+\beta)(cz+\gamma)$$

szorzat maximálissá?

A vizsgált szorzat ugyanakkor vális maximálissá, a mikor ez a körülmény az

$$\frac{(ax+\alpha)(by+\beta)(cz+\gamma)}{abc}$$

kifejezésre nézve áll be, ha abc positív. Ezt a kifejezést így is írhatjuk:

$$\left(x+\frac{\alpha}{a}\right)\left(y+\frac{\beta}{b}\right)\left(z+\frac{\gamma}{c}\right).$$

Minthogy pedig a három tényező összege állandó, a maximum beálltának

$$x+\frac{\alpha}{a}=y+\frac{\beta}{b}=z+\frac{\gamma}{c}$$

a föltételei, melyek az

$$x+y+z=\text{const.}$$

föltétellel kapcsolatban az $x,\ y,\ z$ meghatározására szükséges 3 egyenletet szolgáltatják.

38. *Ha $x+y=const.$, vizsgáljuk meg az x^2+y^2 és x^3+y^3 kifejezések eminens értékeit.*

Legyen

$$x+y=a$$

(a)

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=a^2-2xy.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy xy-nak maximuma $x=y$ esetében áll elő; tehát ugyanez esetben (x^2+y^2)-nek minimuma fog bekövetkezni.

(b)

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=a^3-3axy,\end{aligned}$$

tehát itt is $x=y$ esetében következik be x^3+y^3 maximuma.

Az utóbbi vizsgálat egy érdekes geometriai feladatnak megoldását foglalja magában.

Adott a hosszúságú egyenes oly két részre osztandó, hogy a részek mint átmérők fölött álló gömbök térfogatainak összege eminens értékű legyen.

Ha x és y a gömbök átmérői, akkor

$$x + y = a$$

esetében

$$\frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi y^3}{6}$$

minimuma

$$x = y = \frac{a}{2}$$

föltétel mellett, maximuma pedig akkor áll be, ha akár x, akár y zérussá válik.

39. *Az állandó felszínű egyenes körhengerek közül melyiknek köbtartalma maximális?*

Az állandó felszínt $2\pi a^2$-nek véve, legyen x az alapkör küllője, y a henger magassága; akkor

$$2\pi x^2 + \pi xy = 2\pi a^2$$

$$y = \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

A térfogat

$$\begin{aligned} v &= \pi x^2 y \\ &= \frac{\pi x^2 (a^2 - x^2)}{x} \\ &= \pi x (a^2 - x^2). \end{aligned}$$

A térfogat az

$$x(a^2 - x^2)$$

szorzattal egyidejűleg válik maximálissá. Ez pedig négyzetével, vagyis

$$x^2(a^2 - x^2)^2\text{-tel}$$

egyidejűleg válik maximálissá. Ezt így is írhatjuk:

$$(x^2)^1 \cdot (a^2 - x^2)^2.$$

Minthogy a tényezők összege állandó, maximum esetében a tényezők arányosak kitevőikkel, s így

$$\frac{x^2}{1} = \frac{a^2 - x^2}{2},$$

honnét

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

s így

$$y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

a maximális térfogat pedig

$$\frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Az egyenlő felszínű körhengerek közül az egyenlőoldalú körhengernek térfogata maximális.