AZ ALGEBRAI EGÉSZ FÜGGVÉNYEKRŐL ÉS AZ ELEMI ÚTON MEGFEJTHETŐ MAXIMUM-MINIMUM FELADATOKRÓL. (VI).

28. *Kivételes eset.* Alaptételünk levezetésénél (24. pont) föltételeztük azt, *hogy az állandó összegű két változó tényleg egyenlővé válhatik.* Ugyanis ekkor áll elő az xy maximális értéke a

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

kifejezésben.

Lehetnek azonban esetek – és nem is igen ritkán – melyekben a változók oly korlátozásoknak vannak alávetve, hogy nem válhatnak egyenlőkké. Ily esetekben tételünk ilyként módosítandó:

Ha két változó mennyiség összege állandó, de a változók egyenlőkké nem válhatnak, akkor szorzatuk abban az esetben éri naximumát, a mely esetben külömbségük négyzete minimumát éri.

A tétel még ezzel toldható meg: *a változók szorzata akkor éri minimumát, a mikor külömbségük négyzete maximumát éri.*

Példaképpen a

$$(\sin x + 2)(7 - \sin x)$$

szorzat eminens értékeinek vizsgálatát adjuk, bár itt nem algebrai függvényről van szó. A változó tényezők összege 9, tehát állandó, de a tényezők egyenlőkké nem válhatnak, mert

$$\sin x + 2 = 7 - \sin x$$

arra vezetne, hogy

$$\sin x = \frac{5}{2},$$

a mi pedig lehetetlen.

Ennélfogva keressük, hogy a változók külömbségének négyzetét

$$(2\sin x - 5)^2$$

x-nek mely értéke alakítja minimálissá? A minimum $\sin x = +1$ esetében áll elő. Az adott szorzat maximális értéke 18.

A $(2\sin x - 5)^2$ maximumának az adott szorzat minimuma felel meg. A maximum $\sin x$-nek legkisebb negatív értékére nézve áll be, tehát $\sin x = -1$ esetében. Az adott szorzatnak minimális értéke 8.

29. *A tétel megfordítása. Ha két positív változó mennyiség szorzata állandó, a változók összege akkor minimális, ha a tényezők egyenlők, föltéve, hogy egyenlőkké válhatnak.*

Nevezzük a tényezők szorzatának állandó értékét p-nek

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

identitás alapján

$$4p + (x-y)^2 = (x+y)^2.$$

Ebből következik, hogy $(x+y)^2$, tehát $x+y$ is akkor éri minimumát, a mikor $(x-y)^2 = 0$, tehát $x = y$.

Feltételünket még más módon is igazolhatjuk. Legyen m a minimális összeg értéke. Akkor

$$x + y = m$$

$$xy = p$$

alapján fölállíthatjuk azt a vegyes 2-fokú egyenletet, melynek gyökei x és y.

$$x^2 - mx + p = 0$$

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - p}}{2}.$$

A gyököknek positív számoknak kell lenniök; ennek szükséges és elégséges föltétele az, hogy

$$m^2 - p \geqq 0,$$

más szóval

$$m^2 \geqq p.$$

Minthogy m^2-nek minimális értéke p, ennélfogva

$$m = \sqrt{p}$$

s így

$$x = y = \frac{m}{2} = \frac{\sqrt{p}}{2}.$$

30. *A tétel általánosítása 2-nél több változó esetére. Több positiv változó mennyiség összege állandó lévén, szorzatuk akkor éri maximumát, ha a tényezők egyenlőkké válnak, föltéve, hogy egyenlőkké válhatnak.*

$$x + y + z + u + \ldots = a.$$

Ha a változók nem volnának egyenlőek, akkor állandó összegük megváltoztatása nélkül közülök bármely kettő pl. x és y illetőlegesen

$$\frac{x+y}{2}$$

értékkel helyettesíhető.

Minthogy

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} > xy$$

következésképpen

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot z \cdot u \ \ldots > xyzu \ldots$$

Ezt az okoskodást mindaddig folytathatjuk, míg végre az összes tényezők egyenlőkké váltak. Ebben az esetben a szorzat minden tényezője

$$\frac{x + y + z + \ldots + t}{n}$$

értékű lesz, és általában

$$xyz \ldots t < \left(\frac{x + y + z + \ldots + t}{n} \right)^n.$$

Általánosítsuk a mértani középarányos fogalmát olyként, hogy n számú mennyiség mértani középarányosa alatt szorzatuk n-dik gyökét értjük. Ha egyenlőtlenségünk mindkét oldalából n-dik gyököt vonunk, akkor

$$\sqrt[n]{xyz \ldots t} < \frac{x + y + z + \ldots + t}{n}$$

egy ismert tétel általánosításaként azt fejezi ki, hogy: *n számú mennyiség mértani középarányosa kisebb számtani középarányosánál.*

31. *Negatív tényezők esete.* Tételünk páros számú negatív tényező esetében is érvényes marad.

Ugyanis a változók p szorzata positív és az

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} > xy$$

egyenlőtlenségből

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot z \ \ldots t > p$$

következik s í. t

Ellenben, ha a negatív tényezök páratlan számúak, akkor az

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} > xy$$

egyenlőtlenség az

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot z \ \ldots t < p$$

egyenlőtlenséget vonja maga után, s ekkor a tényezők egyenlősége esetében a szorzat minimális érlékéhez jutunk.

32. *Az általánosított tétel megfordítása. Ha több positív változó mennyiség szorzata állandó, a változók összege akkor minimális, ha a tényezők egyenlők, föltéve, hogy egyenlőkké válhatnak.*

Legyen $xyz \ldots \ t = \text{const.}$ Ha a változók nem egyenlők, akkor összegük kisebbíthető, a nélkül, hogy szorzatuk megváltoznék; mert ha pl. x nem egyenlő y-nal (jele: $x \neq y$), akkor a szorzatban ezen változókat geometriai középarányosukkal helyettesíthetjük és

$$\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy} < x + y \cdot z \ \ldots t = \text{const.}$$

ugyanazt mondja, mint a megelőző egyenlőség. De

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} < x + y$$

s ennélfogva

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + z + \ldots + t < x + y + z + \ldots t$$

s így a változók összege akkor lesz minimális, ha a szorzat tényezői egyenlőek.

A módszer a következő két feladatra alkalmazható:

922. Az R sugarú gömbbe írt derékszögű egyenközlapok közül melyiknek térfogata maximális?

923. Az egyenlő térfogatú egyenközlapok közül melyiknek felszíne legkisebb?