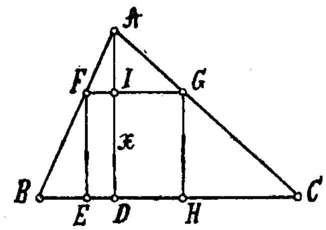
13. *Az ABC háromszögbe rajzolható derékszögű parallelogrammák közül melyiknek területe a legnagyobb?*



A mellékelt rajzban szereplő hosszúságok rövid jelölése a következő legyen:

$$AD = m,\ BD = a,\ CD = b.$$

Minthogy

$$AFI\triangle \sim ABD\triangle$$

és

$$AGI\triangle \sim ACD\triangle$$

az oldalok arányosságából

$$m : a = (m-x) : FI$$

$$m : b = (m-x) : GI.$$

Innét

$$FI = \frac{a(m-x)}{m}$$

$$GI = \frac{b(m-x)}{m}$$

$$FI + GI = FG = \frac{(a+b)(m-x)}{m}$$

s a parallelogramma területe

$$y = \frac{(a+b)}{m}(m-x)\cdot x$$

$$y = \frac{(a+b)}{m}(-x^2+mx).$$

Minthogy x^2-nek negatív az együtthatója, tehát az eminens érték maximum, s beáll, ha

$$x = \frac{m}{2}.$$

A maximális terület pedig:

$$y = \frac{m}{4}(a+b).$$

A megelőzőkben ismertetett módszer segítségével még két feladatot fogunk tárgyalni, melyeknél a vizsgált egész függvény más alakú, mint az, a mellyel első sorban foglalkozunk, de arra visszavezethető.

14. *Állapítsuk meg az*

$$7 = (ax+b)^2 + (\alpha\, x+\beta)^2$$

függvénynek eminens értékeit.

$$y = (a^2+\alpha^2)x^2 + 2(ab+\alpha\beta)x + b^2 + \beta^2.$$

Minthogy ebben a 2-fokú egész függvényben x^2-nek együtthatója (két négyzetszám összege) mindig pozitív, azért az eminens érték csakis minimum lehet, mely beáll, ha

$$x = -\frac{ab+\alpha\beta}{a^2+\alpha^2}.$$

A függvénynek minimális értéke pedig

$$y = \frac{(\alpha\beta-ab)^2}{a^2+\alpha^2}.$$

15. *Állapítsuk meg az $x^3 + y^3$ kifejezés eminens értékeit, tudván azt, hogy $x + y = a$, hol a alatt positív számot értünk.*

A föltételi egyenletből

$$y = a - x$$

s ezt a kifejezést helyettesítvén, az

$$x^3 + (a - x)^3$$

alakot ölt, vagyis

$$3ax^2 - 3a^2x + a^3$$

lesz a megvizsgálandó függvény. Ennek csakis minimumáról lehet szó, mely beáll, ha

$$x = \frac{a}{2}.$$

Minthogy

$$x + y = a,$$

tehát ez esetben

$$y = \frac{a}{2}$$

s a minimális érték $= \dfrac{a^3}{4}$.

Az eddigiek begyakorlására ajánljuk a következő feladatok megoldását: [1]

(a) Az a szám oly két részre osztandó, hogy az első rész négyzetének m-szereséhez a második rész négyzetének p-szeresét hozzáadván, az összeg minimális értékűvé legyen.

(b) Az ABC hosszúságon keressük meg azt a pontot, melyre nézve

$$\overline{AC}^2 + 3\overline{BC}^2$$

(K. M. L. IV. 322. feladat.) minimális.

(c) Két körhengernek magasságai h és h'; határozzuk meg x, x' küllőiket oly módon, hogy palástjaik összege $4\pi a^2$ legyen, térfogatuk összege pedig minimálissá váljék.

(d) Rajzoljunk egy adott körnegyedbe maximális területű derékszögű parallelogrammát oly módon, hogy a parallelogramma egyik csúcspontja a körnegyed körének középpontjával egybeessék.

861. *(e)* Ha valamely egyenlő oldalú háromszög AB, BC, CA oldalait ugyanazon arányban osztjuk, s az osztópontokat összekötjük, ismét egyenlő oldalú háromszöget kapunk. Mily arányban kell az adott háromszög oldalait osztanunk, hogy az osztópontok háromszögének területe minimális legyen?

862. *(f)* Rajzoljuk az r küllőjű körbe a legnagyobb területű derékszögű parallelogrammát.

(g) Rajzoljunk egy adott négyzetbe minimális területű négyzetet. Mily arányban osztják föl a keresett négyzet csúcspontjai az adott négyzet oldalait?

863. *(h)* Az ABC háromszög BC oldalának közepe csúcspontja annak a háromszögnek, melynek másik két csúcspontját egy a BC oldallal párhuzamos egyenes metszi ki az adott háromszögnek AB és AC oldalain. Mily helyzete lesz a metsző egyenesnek, ha az ily módon meghatározott új háromszög területe eminens értéket vesz föl?

864. *(i)* Adott kör síkjának egy pontjától a körhöz szelőt húzunk. A szelőnek mely helyzetében lesz annak a háromszögnek területe maximálissá, melynek egyik csúcspontja a körnek középpontja, másik két csúcspontját pedig a szelő határozza meg a kör kerületén? Szerkesszük meg e szelőt.

(j) Az AB vonaldarab C-ben oly két részre osztandó, hogy AC fölött az ACD egyenlő oldalú háromszöget, CB fölött a $CBEF$ négyzetet szerkesztvén, és D-t F-fel összekötvén, az $ABEFD$ ötszög területe minimális legyen.

865. Az ABC háromszög AD súlyvonalán keressünk egy oly M pontot, melyre nézve

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

minimális értékű.

(l) Egy téglalap szomszédos oldalai: a és b. A csúcsoktól egyirányban az oldalra x távolságokat rakunk föl, melyek végpontjai egy parallelogrammának csúcspontjai. 1. Mily föltétel mellett minimális ezen parallelogrammának területe? 2. Kísérjük figyelemmel a beírt parallelogramma területének változásait.

[1] T. olvasóinkat kérjük, hogy csakis a számokkal megjelölt feladatok megoldását küldjék be.

866. *(m)* Adott rhombusba a legnagyobb területű derékszögű négyszög beírandó.

(n) Egy téglalap szomszédos oldalai: a és b. Két szemköztes csúcstól kiindulva, a szomszédos oldalra x távolságokat rakunk föl. Az így talált négy pont egy beírt parallelogrammát szolgáltat. 1. Mikor válik ennek területe minimálissá? 2. Mily módon változik ezen parallelogrammának a területe?

867. *(o)* Az R küllőjű gömbbe egyenlő oldalú kúpot írunk. Ennek alapjával párhuzamosan síkot fektetünk. A síknak mely helyzeténél lesz a kúp és gömb átmetszeteinek összege maximális?

(p) Adva van két egyenlő magasságú körhenger térfogatainak összege. Határozzuk meg küllőiket olyként, hogy a palást felületek összege maximálissá váljék.

(q) Rhombusba oly téglalap írandó, mely a rhombus átlója körül forgatva a legnagyobb felszínnel bíró hengert adja.

(r) Egy háromszögnek ismerjük két oldalát, s a köztük fekvő szöget. Az utóbbi szögnek mely értéke esetében válik a háromszög körül írt kör sugara minimálissá? (K. M. L. I. p. 44.)