6. *A függvény értékének változása.* Függvényünk egyértékű lévén, a független változó minden értékéhez a függő változónak egy és csakis egy értéke tartozik. E két összetartozó számérték a függvény egy *értékrendszere.* Másrészt a függvény folytonos lévén, az egyik értékrendszerről a másikra való átmenetel közben megszakítás sehol sincs. Ha tehát a derékszögű coordinaták segítségével a függvénynek egymásra következő értékrendszereit, mint a síknak pontjait ábrázoljuk, akkor a független változó értékeit, mint abscissákat, a hozzájuk tartozó függő változó értékeket, mint ordinatákat tekintjük, s megszerkesztjük a függvényhez tartozó görbe vonalat.

7. *A 2-od fokú algebrai egész függvény ábrázolása.* Föltételezzük azt, hogy az

$$y = ax^2 + bx + c$$

függvénynek a együtthatója positív.

Tárgyalásunk most már az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vegyes másodfokú egyenlet gyökeinek természete szerint 3 eshetőséggel áll szemben.

I. Az egyenletnek gyökei x' és x'' valósak, s egymástól külömbözőek. Ennek föltétele az, hogy a discriminans: $b^2 - 4ac > 0$, vagyis positív.

Az egyenlet többtagúját a gyöktényezőkkel fejezzük ki:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''). \tag{1}$$

Másrészt az ismeretes átalakítások után :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

közvetlenül világos, hogy $x = -\infty$ esetében (2) alapján $y = +\infty$.

Minthogy a discriminans föltétel szerint positív, ennélfogva (2)-ben a kivonandó szintén positív szám. Addig, míg x a $-\infty$-től kiindulva a negatív számsor mentén növekszik, a kisebbítendőnek értéke is növekszik.

$$x = 0 \text{ esetében } y = c.$$

Addig míg x a positív számsor mentén növekszik, (2)-ben a kisebbítendő mindinkább nagyobbodván, y-nak értéke is növekedőleg halad, s $x = +\infty$ esetében ismét $y = +\infty$ lesz.

Az eddigiek még nem myújtanak tiszta képet. De tekintsük most az x', x" gyököket. Tudjuk, hogy

$$x = x' \text{ esetében } y = 0$$

$$x = x'' \text{ esetében } y = 0$$

tehát a függvény értéke kétszer veszi föl a zérus értéket. Föltéve, hogy $x'' < x'$, akkor a$-\infty$-től kezdődőleg növekedő független változó mellett a függvény értéke először $x = x''$ esetében, másodszor $x = x'$ esetében válik zérussá. Ha a függvény folytonos, akkor ezen két érték között negatívvá kell válnia, még pedig oly módon, hogy x''-től kezdve értéke fogy, majd x-nek egy bizonyos értékétől kezdve ismét növekszik, hogy másodszor átmehessen a O-on. Lássunk egy példát.

$$y = x^2 - 8x + 12$$

a megelőzők szerint így írható föl:

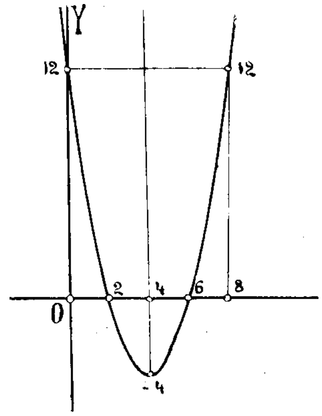
$$= a\left[\left(x - \frac{8}{2}\right)^2 - \frac{64 - 4 \cdot 12}{4}\right]$$

$$y = (x - 4)^2 - 4.$$

A függvény értékváltozásait az x-nek $x = -\infty$-től $x = +\infty$-ig való változása közben csak a legjellemzőbb esetekre vonatkozólag számítván, a következő táblázatot állíthatjuk össze :

x	$-\infty$	0	2	4	6	8	$+\infty$
y	$+\infty$	12	0	-4	0	12	$+\infty$

A függvényt ábrázoló görbét ebből a 7 pontból megrajzolhatjuk.



A rajznak kettős előnye van : 1. megtekintése a függvény változásáról tisztább képet nyújt mint a milyent akármilyen, még oly részletességgel kidolgozott értékrendszer- táblázat nyújthatna; 2. a görbe vonalban a *parabolára* ismerünk.

Az $x = 4,\ \ y = -4$ értékrendszer a parabola tetőpontját adja meg. A függvény az $x = 2 \ldots 6$ intervallum mentén negatív értéket vesz fel. Az $x = -\infty \ldots 4$ intervallumban a függvény értéke fogy, az $x = 4 \ldots +\infty$ intervallumban pedig ismét növekedik. A fogyás és növekedés közös határa a parabola tetőpontja; itt veszi föl a függvény a lehető legkisebb értéket. Mikor a függvény fogyásból növekedésbe megy át, akkor azt mondjuk róla, hogy *minimumát* éri.

Visszatérve az általános eset tárgyalására, kérdés, x-nek mely értékére nézve veszi föl y e minimális értéket? A (2) alaknak puszta megtekintéséből láthatjuk, hogy a külömbség alakjában kifejezett y értéke akkor válik minimálissá, ha a kisebbítendője

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

tehát ha

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ennék az értéknek megfelelőleg

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

II. Az egyenletnek gyökei valósak és egymás közt egyenlők. Ennek föltétele az, hogy

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Ebben az esetben

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

alakot ölti, s a függvénynek egyáltalában nincsenek negatív értékei. A minimum esete ismét

$$x = -\frac{b}{2a}$$

mellett áll be, melyhez az $y = 0$ érték tartozik. Például legyen

$$y = 9x^2 - 6x + 1$$

akkor

$$y = (3x - 1)^2$$

alakban állítható elő. A legjellemzőbb értékrendszerek táblázata most:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y	$+\infty$	1	0	1	$+\infty$

III. Az egyenletnek gyökei képzetesek. Ennek föltétele az, hogy $b^2 - 4ac < 0$, vagyis a discriminans negatív. Az

$$y = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

alak most azt mutatja, hogy a függvény a független változónak minden értékére nézve positív értéket vesz föl. A minimum akkor áll be, ha ez az első tag eltűnik, tehát

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Például:

$$y = 4x^2 - 5x + 3,$$

miből

$$y = 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{23}{16}.$$

8. *Ha a negatív.* Ebben az esetben a független változónak az abscissa tengely mentén való növekedése közben a függő változó ugyanazon az értéksorozaton halad át, mint a melyen positív a esetében, csakhogy mindvégig ellenkező előjellel.

Ha tehát x a $-\infty$-től $-\dfrac{b}{2a}$-ig növekszik, e közben y is $-\infty$-től $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$-ig növekszik; x-nek $-\dfrac{b}{2a}$-tól $+\infty$-ig növekedése közben pedig y a $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$-tól $-\infty$-ig csökkenik. A függvény az $x = -\dfrac{b}{2a}$ értékre nézve maximumát éri.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeinek természete szerint ismét 3 eset lehetséges, a szerint, a mint a két gyök valós; (pl.$y = -x^2 + 4x - 3$); a gyökök egyenlőek (pl. $y = -x^2 + 4x - 4$) és a gyökök képzetesek (pl. $y = -x^2 + 6x - 17$).

9. *Végeredmények.* A megelőzőket egybevetve, a következő tételt nyerjük:

Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény a közben, míg a független változó $-\infty$-től $+\infty$-ig halad, positív a esetében $+\infty$-től kezdve a minimális $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ értékig csökkenőleg, innét kezdve $+\infty$-ig növekedőleg halad; negatív a esetében $-\infty$-től maximális $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ értékig növekedőleg, innét kezdve $-\infty$-ig csökkenőleg halad.

Ha a függvény maximális vagy minimális értékeit, (melyek csakis külön-külön léphetnek föl) egy szóval *eminens*-értékeknek nevezzük, akkor a föntebbi tételt még így is kifejezhetjük:

Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény a független változónak $-\dfrac{b}{2a}$ értéke esetében eminens értéküvé válik, és pedig maximumát, illetőleg minimumát éri, a szerint, amint az a együttható negatív, illetőleg positív.

A függvénnyel kapcsolatos parabola tengelye az abscissák tengelyére merőleges lévén, az eminens értéknek megfelelő tetőpontjában érintője az abscissák tengelyével párhuzamos.

Annak eldöntése, vajon az eminens érték maximum-e avagy minimum, attól függ, hogy a görbe vonal a kérdéses pont közelében homorú-e avagy domború-e az abscissa tengelyre nézve? Ezek után lássunk nehány példát!

10. *Osszunk föl egy adott a hosszúságot oly két részre, hogy a részek fölött alakított egyenlő oldalú háromszögek területeinek összege minimális legyen.*

Nevezzük a-nak egyik részét x-nek; akkor a másik rész $(a - x)$. Az ezen oldalak fölött szerkesztett egyenlő oldalú háromszögek területeinek összege

$$y = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}(a-x)^2\sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{2}\right).$$

E függvény minimuma beáll, ha

$$x = \frac{a}{2}$$

értéke pedig

$$y = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot a^2.$$

11. *Keressük meg x-nek, azt az értékét, a mely mellett az*

$$y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$$

függvény minimális értéket vesz föl.

$$y = n\,x^2 - 2\sum a \cdot x + \sum a^2.$$

Minthogy x^2-nek együtthatója positív, tehát az eminens érték tényleg minimum, s beáll, ha

$$x = \frac{1}{n} \sum a.$$

Ha tehát valamely ismeretlen x számnak az értékét n számú astronomiai, physikai, geodætikai vagy más megfigyeléssel akarjuk meghatározni, és az igazi x szám helyett az észlelés hibáival pontatlanított $a_1 a_2 \ldots a_n$ eredményekhez jutunk, akkor az egyes mérésekből nyert számok arithmetikai középarányosa adja meg az x-nek legvalószinűbb értékét, föltéve, hogy valamennyi mérés vagy megfigyelés egyformán megbízható. A kérdéses esetben ugyanis a *legkisebb négyzetösszegek módszere* szerint az

$$(a_1 - x),\ (a_2 - x), \ldots (a_n - x)$$

hibák négyzeteinek összege minimummá válik.

12. *Az adott a alap fölött szerkesztett $2s$ kerületű háromszögek közül melyiknek területe a legnagyobb?*

Ha x a keresett háromszögnek második oldala, akkor a harmadik oldal $(2s - a - x)$ s így területe a *Heron*-féle képlet szerint :

$$y = \sqrt{s(s-a)(s-x)(a+x-s)}$$

honnét:

$$y^2 = s(s-a)[-x^2 + (2s-a)x - s(s-a)].$$

A függvény értékének négyzete tehát maximális értékűvé válik, ha

$$x = s - \frac{a}{2}$$

honnét

$$2s - a - x = s - \frac{a}{2}$$

vagyis a keresett háromszög egyenlő szárú és területe

$$y = \frac{a}{2} \sqrt{s(s-a)}.$$