I. *Mi az a függvény?* Erre a kérdésre rövid, de általános érvényű feleletet adni rendkívül nehéz. Mivel azonban tárgyunk igen speciális jellegű, azért erre az *Euler*-féle értelmezés teljesen kielégítőnek fog bizonyulni. *Euler* azt a feleletet adta, hogy *függvény alatt azt az analytikai kifejezést értjük, mely egy változó mennyiség és bizonyos állandó mennyiségek közt fennáll.* Az "analytikai kifejezés" értelmét úgy állapította meg, hogy a függvényben az algebrai műveleteken kívül még a logarithmus, exponenses mennyiségek és *számtalan egyéb kapcsolatok* is szerepelhetnek, ezzel a függvény-fajok kimeríthetetlen sokaságára rámutatván.

Algebrai és főleg geometriai tanulmányaink közben gyakran találkozunk változó és állandó mennyiségek kapcsolatával. Legtöbbször nem történik utalás az ily kapcsolatoknak függvény voltukra. Tudjuk pl., hogy a kör kerületét $2r\pi$, területét $r^2\pi$ adja. Ezekben π az állandó mennyiség, r a változni képes mennyiség, melynek értékétől egy másik mennyiségnek, a kerületnek, illetőleg a területnek értéke függ.

Minthogy r-nek értékét magunk szabhatjuk meg, azért ezt a változó mennyiséget *független változó*-nak nevezzük; r-rel együtt azonban a kerület és terület is megváltozik, tehát ezek ugyancsak változó mennyiségek. Minthogy azonban értékük a független változó értékével szoros kapcsolatban áll, azért ezeket a független változóval szemben *függő változók*-nak nevezzük.

A változókat rendszerint az abc utolsó betűivel szoktuk jelölni, még pedig x-nek nevezzük a független változót, y-nak a függő változót. E szerint $y = 2\pi x$, illetőleg $y = \pi x^2$ volnának a fenti függvények jelölései.

2. *Hogyan jelöljük a függvényt általánosságban?* A függvény jelölésére általános jelvény is szolgál. Ugyanis a függvényben szereplő állandókat nem tekintvén, első sorban a változókra kell figyelmünket fordítani. Ha már most a függvény (functio) szó kezdőbetűjével f-fel azokat a műveleteket jelöljük, melyek a független változót az állandókkal összekötik, akkor már ráakadtunk a szükséges jelvényre. Tegyük ki f mellé x-et, a független változót, s legyen gondunk arra, hogy felírt jelvényünk se szorzatnak, se hatványnak tekinthető ne legyen, akkor czélt értünk. Ez pedig az $f(x)$ alakban való jelöléssel érhető el. Ha még a függő változót is tekintetbe vesszük, akkor a függvény jele:

$$y = f(x)$$

(olv. y függvénye x-nek).

Az ilyen függvényt *kifejtett, explicit* függvénynek nevezzük, a mennyiben a függő változó a független változótól elkülönítetten fordul elő. De ha pl.

$$y^2 + ax + b = 0$$

olyként értelmeztetnék, hogy benne y a függő, x a független változó, akkor a változók nincsenek egymástól elkülönítve, *ki nem fejtett, implicit* függvénnyel állunk szemben. Jelölése így eszközölhető:

$$f(x, y) = 0.$$

3. *A függvények osztályozása.* Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a független változónak és a függvényben szereplő állandóknak csupán reális értékeit vesszük tekintetbe. A függvények osztályozásánál az analytikai kifejezésre kell figyelnünk. Ennek jellegét a benne szereplő műveletek szabják meg. Az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, positív egész számú kitevőre való hatványozás és gyökvonás, szóval az algebrai műveletek azok, melyek az u. n. *algebrai függvények*-ben még előfordulhatnak. Ha a független változó positív, egész számú kitevőre vonatkozó gyökjel alatt szerepel, akkor a függvény *irrationális,* ellenben, ha a független változó csupán a többi műveletekkel van az állandókkal összekapcsolva, akkor a függvény *rationális.*

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

az irrationális,

$$y = ax^2 + bx + c$$

a rationális függvény egy-egy példája.

A törtkitevőjű és negatív kitevőjű hatványok ismeretes értelmezése alapján könnyen belátható, hogy

$$y = (a + bx)^{\frac{3}{2}}$$

irrationális függvény, ellenben

$$y = (a + bx)^{-5}$$

rationális függvény. Mert az első

$$y = \sqrt{(a + bx)^3}$$

a második

$$y = \frac{1}{(a + bx)^5}$$

alakban írható. Ugyanígy a negatív vagy törtkitevőjű gyök is mindig irrationális függvényre vezet. Ezzel megokoltuk azt a korlátozást, melyet a kitevőkre vonatkozólag megtettünk. Tehát: *mielőtt az algebrai függvény jellege felől döntenénk, a benne szereplő összes kitevőket positív egész számok alakjában kell szerepeltetnünk.*

A gyöknek többértékűsége miatt az irrationális függvényekben a függő változó egy bizonyos értékéhez a független változónak egyidejűleg több értéke tartozik; a rationális függvényekben azonban csak egy. E szerint megkülönböztetünk *egyértékű és többértékű* függvényeket.

A logarithmusok, az exponenses s goniometriai mennyiségek, stb., mint pl. ezek:

$$y = \log x,\ y = a^x,\ y = \sin x,\ y = arc\mathrm{tg}x$$

u. n. *transcendens* függvények.

4. *Az algebrai függvények osztályozása.* A szerint, a mint a független változó osztóként szerepel, illetőleg mint ilyen nem szerepel, a függvény lehet *tört függvény,* illetőleg *egész függvény.*

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{a+bx}{c+dx}$$

törtfüggvények, ellenben

$$y = a + bx + cx^2$$

egész függvény.

Az egész függvényre nézve a független változónak a legmagasabb kitevőjű hatványa mérvadó. E szerint az algebrai egész függvény lehet: elsőfokú vagy *linearis,* mint pl. $y = a + bx$; másodfokú vagy *quadratikus,* mint pl. $y = a + bx + cx^2$ Az n-ed fokú algebrai egész függvény alakja tehát

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + k.$$

5. *A függvény folytonosságáról. A függvény akkor folytonos, ha a független változónak bármily csekély növekedtével a függő változónak ugyancsak csekély változása* (növekedése, esetleg fogyása) *jár.*

Ez a tulajdonság vagy a független változónak minden értékére nézve, tehát a $-\infty$-től $+\infty$-ig terjedő határok között, vagy a függő változónak egy meghatározott *interealtum*-ból vett értékeire vonatkozhatik. Hogy az utóbbit megértsük, hivatkozunk az

$$y = \mathrm{tg}x$$

függvényre, mely x-nek $0°$-tól $90°$-ig terjedő értékeire nézve folytonos, de már a $0°$-tól $180°$-ig terjedő értékeire nézve nem az, mert hiszen $\mathrm{tg}x$ az x-nek $90°$-hoz igen közel álló valamely értékére nézve egy igen nagy positív számmal, a $90°$-ot igen csekéllyel túllépő értékére nézve pedig egy igen nagy negatív számmal egyenlő. Az $y = \mathrm{tg}x$ függvény folytonosságában $x = 90°$ esetére nézve szakadás áll be.

A folytonosság algebrai jellemzésénél e szerint a függvény változását kell tekintetbe vennünk. Ha a független változót valamely igen kicsiny értékkel növeljük, akkor az $f(x)$ függvény átalakul $f(x+h)$-vá. A függvény értékének változását az

$$f(x+h) - f(x)$$

külömbség adja meg. Ha ez a különbség h-val egyidejűleg elenyésző csekély mennyiség, akkor a függvény folytonos. Minden egyes esetben a kérdés csak akkor van véglegesen eldöntve, ha megvizsgáljuk, hogy mely körben, mely határok közt folytonos a függvény. Könnyen kimutathatjuk, hogy tárgyalt függvényünk x-nek minden értékére nézve folytonos. Ugyanis:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c,$$

ha a függvény változását számítjuk, akkor

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) =$$

$$= ah^2 + 2ahx + bh = h(ah + 2ax + b).$$

Már pedig, tekintet nélkül arra, hogy x-nek mely véges értékéből indulunk ki,

$$h(ah + 2ax + b)$$

a h-val egyidejűleg válik végtelenül kicsinnyé s így a 2-*od fokú algebrai egész függvény a független változónak minden értékére nézve folytonos.*