a) Legyenek a feladat feltételeit kielégítő számok, ha vannak ilyenek, $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghij}$. Összefüggésüket részletesen kiírva, majd átalakítva

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i\ j \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &(100a+10b+c)+(100d+10e+f)= \\ &=1000g+100h+10i+j, \\ &(a+b+c+d+e+f)-(g+h+i+j)= \\ &=999g+99(h-a-d)+9(i-b-e)=9A, \end{aligned}$$

ahol A egész szám. Másrészt valamennyi számjegy összege

$$(a+b+c+d+e+f)+(g+h+i+j)=0+1+\ldots+9=45=9\cdot 5.$$

E két egyenletből a négyjegyű szám számjegyeinek összege

$$s=g+h+i+j=\frac{9(5-A)}{2},$$

osztható 9-cel, mert a bal oldallal együtt a jobb is egész szám, és $5-A$ osztható 2-vel, mert ha páratlan volna, akkora 9-szerese sem lehetne osztható 2-vel. Így pedig az ismert oszthatósági ismertetőjel szerint a $\overline{ghij}$ szám maga is osztható 9-cel.

b) Megmutatjuk, hogy léteznek a feladatnak megfelelő számok. g értéke csak 1 lehet, mert két háromjegyű szám összege kisebb 2000-nél. Így s nem nagyobb $1+9+8+7=25$-nél, másrészt pozitív, tehát értéke 9, vagy 18. Próbálkozzunk $s=9$-cel. Így h, i, j-t vagy a 0, 2, 6, vagy a 0, 3, 5 számhármas adja meg.

Véve a 0, 2, 6 hármast a hátralevő jegyekből bármelyik kettőnek az összege legalább akkora, mint $3+4=7$, tehát (1)-ben az összeadandók bármelyik két jegyének az összege nagyobb az összeg mindegyik jegyénél. Ezért az összeadásban minden oszlop maradékot visz a következő oszlopba. Így pl. $j=6$ csak $7+9=16$-ból adódhat. Ezért pl. $i=2$-höz $b+e=11$, ami a még nem használt jegyekből $3+8$-cal kiadódik. Most már $h=0$, így $a+d=9$, és éppen ennyi a hátralevő 4 és 5 összege, tehát pl.

$$437+589=1026$$

egy megoldása a feladatnak. Ha pedig j, i, h-t 2, 6, 0-nak próbáljuk, hasonlóan kapjuk a $473+589=1062$ megoldást. (Az oszlopok kisebb jegyét mindig az első háromjegyűbe írtuk; a három oszlopon belüli, egymástól független cseréket elvégezve mindegyik megoldás $2^3=8$ megfelelő összeállítást jelent. Mivel minden oszlopban vittünk át maradékot, azért mindkét példában a tízes és százas oszlop is a maga egészében megcserélhető.)

Haupert János (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)

Megjegyzés. A dolgozatok még a következő összeállításokat találták:

$$\begin{array}{r} 246 \\ 789 \\ \hline 1035 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 264 \\ 789 \\ \hline 1053 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 432 \\ 657 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 324 \\ 765 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Ezekben is lehetséges oszlopcsere, egyrészt a tízes oszlop, másrészt a százas ill. egyes oszlop között.