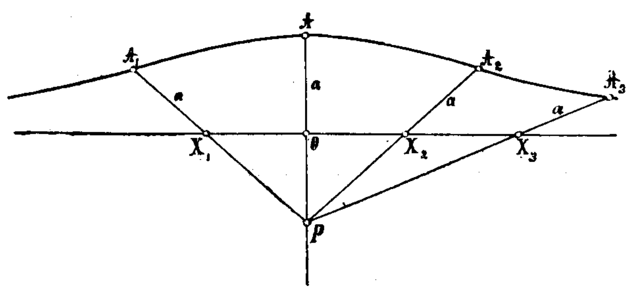
N i k o m e d e s.

(Kr. e. II. század.)

A Kr. e. III. század három óriásának működése után nem igen lehetett szó újabb eredményekről, további fejlődésről a mathematika terén. Euklides, Archimedes és Apollonius a lehető legmagasabb fokra emelték tudományukat bámulatos lángelméjükkel; kisebb tehetségek csakis az esetleg továbbra is megoldás nélkül maradt kérdésekkel foglalkozhattak vagy olyanokkal, melyeket amazok vetettek fel. Azért is ne csodálkozzunk, a mikor e nagy eredmények után ismét csak a delosi problema, a triszekczió, esetleg egy-egy körmérési feladat lép fel és a Kr. e. II. század mathematikusai összes munkásságukat csak ily kérdésben fejtik ki. Hiszen mi magunk, kik pedig mathematikai módszerben nevelve, néhány évi tanulás után megismerhetjük mindazt, a mit e nagy elmék 2000 évvel ezelőtt tudtak, nemcsak bámulva csodáljuk ez eredményeket, hanem egyszerűen érthetetlen rejtélynek tartjuk azt a körülményt, hogy ők tulajdonképpen rendszeres mathematikai iskolázottság híján annyi tudomány birtokába tudtak jutni és e tudományhoz még módszert is adni. Szinte természetesnek tűnik fel, hogy ekkora haladás után bizonyos stagnálás álljon be: a haladás oly rohamos volt, hogy az elmék nem is voltak eléggé érettek és elkészültek arra, hogy ez óriási anyaggal megküzdjenek. Nem csoda tehát, hogy a nagy mathematikusokat közvetlenül követők nem bírtak arra a magaslatra fellépni, melyen azok voltak és nem gyarapították a tudományokat nagyszabású munkálatokkal, sem módszert nem dolgoztak ki, hanem megelégedtek az előbb említett, szinte már konvenczionális kérdésekkel.

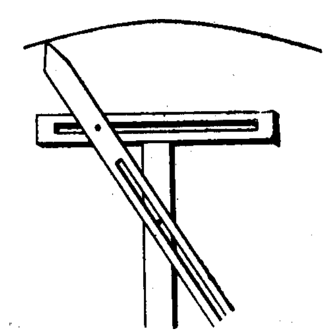
Elsőnek *Nikomedest* említjük meg azok közül, kiknek neve e problémákhoz fűződik. Személyéről egyebet nem tudunk, mint azt, hogy Kr. e. 200 körül szerkeszthette meg azt a görbe vonalat, mellyel a következőkben részletesebben foglalkozunk.



E görbe neve: *kagylóvonal (conchois)* és úgy keletkezik, hogy egy egyenesnek (1. ábra) állandó P pontjából sugarakat húzunk az ezen egyenesre merőleges OX egyenesnek egyes pontjaihoz: $O,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots$ és e pontokból a sugarakra állandó a távolságot rakunk fel $A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$ felé, úgy hogy:

$$a = OA = X_1A_1 = X_2A_2 = X_3A_3 = \ldots$$

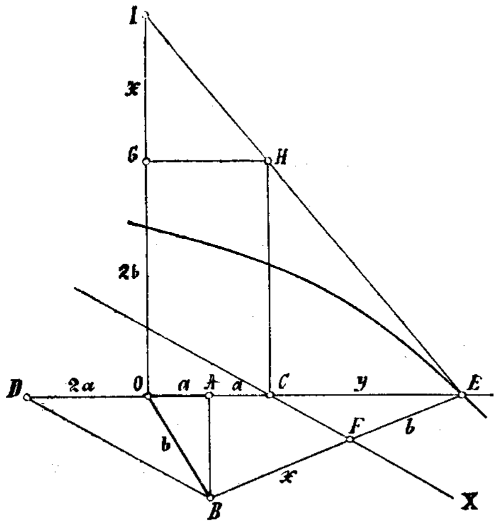
Nikomedes maga ezt a P pontot *pólus*nak ($\pi\acute{o}\lambda o\varsigma$) nevezte, a görbét pedig egy eszköz segélyével rajzolta meg. Ez eszköz szerkezetét a mellékelt ábra teljesen megérteti: bővebb magyarázatra nincs szükség.



Nikomedes azt mutatta ki e vonalról, hogy az mindinkább közeledik az állandó egyeneshez és hogy minden egyenes vonal, mely az állandó egyenes és a kagylóvonal között fekszik, ez utóbbit metszi, végre pedig felhasználta a görbét a delosi probléma megoldására, a miben páratlan mathematikai éleslátást tanúsított. Nikomedes eredeti szerkesztése a következő: legyen a két egyenes a és b, melyeknek kétszeresei közé két középarányos: x és y ékelendő, úgy hogy a következő aránylat legyen:

$$2a : x = x : y = y : 2b.$$

Szerkesszünk oly derékszögű háromszöget, melynek egyik befogója: $OA = a$ és átfogója: $OB = b$ (1. ábra).



Vigyünk fel továbbá a befogó meghosszabbítására O ponttól jobbra és balra OC és OD távolságokat, melyeknek mindegyike $2a$-val egyenlő. Húzzuk meg a BD egyenest és ezzel a C ponton keresztül CX párhuzamost. Mármost legyen ez a CX egyenes oly kagylóvonalnak állandó egyenese, melynek polusa a B pont és melynek állandó távolsága b legyen. E kagylóvonal a DOC egyenest E pontban metszi; kössük össze az E pontot B-vel egyenes vonallal, mely a CX egyenest F pontban metszi. Mivel DB és CF párhuzamosak, a következő aránylat áll fönn:

$$DE : CE = BE : FE;$$

ha CE-t y-nal és BF-et x-szel jelöljük, így írhatjuk az aránylatot:

$$(4a + y) : y = (x + b) : b.$$

Vonjuk ki az utótagokat az előtagokból, lesz :

$$4a : y = x : b,$$

miből:

$$xy = 4ab;$$

ezt az egyenletet ismét más aránylatban fejezhetjük ki :

$$2a : x = y : 2b.$$

Most még csak az x és y közötti arányt kell megtalálnunk. E végből vegyük tekintetbe, hogy az AB egyenes az OAB és EAB derékszögű háromszögek közös befogója és mint ilyen, négyzete a Pythagoras tétele által kifejezhető:

$$\overline{OB^2} - \overline{OA^2} = \overline{EB^2} - \overline{EA^2};$$

az egyszerűbb jelzéseket behelyettesítve:

$$b^2 - a^2 = (x + b)^2 - (a + y)^2;$$

miből:

$$x(x + 2b) = y(y + 2a);$$

tehát:

$$x : y = (y + 2a) : (x + 2b).$$

Ezt az utóbbi: $(y + 2a) : (x + 2b)$ arányt azonban még máshonnan is meg kell határoznunk. Szerkesszünk az $OC = 2a$ oldalra $OCHG$ téglalapot, melyben $OG = 2b$ és kössük össze az E pontot a H ponttal, úgy hogy ez az egyenes meghosszabbítva I pontban messe az OG oldal meghosszabbítását. Mivel IGH és HCE hasonlók egymáshoz, azért:

$$GH : GI = CE : CH,$$

vagyis:

$$2a : GI = y : 2b$$

Mert azonban már egy

$$2a : x = y : 2b$$

aránylatunk volt, azért tehát $GI = x$. Végre pedig IOE és HCE háromszögek is hasonlók; e miatt:

$$OR : OI = CE : CH,$$

vagyis:

$$(y + 2a) : (x + 2b) = y : 2b.$$

Mivel pedig már egy

$$x : y = (y + 2a) : (x + 2b)$$

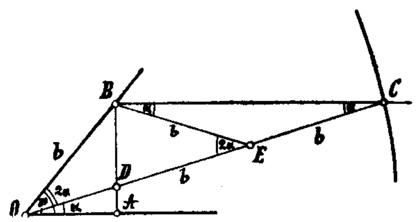
aránylatunk volt, ez a most nyerttel egybevetve, lesz:

$$x : y = y : 2b$$

s így végre:

$$2a : x = x : y = y : 2b.$$

Nikomedes a kagylóvonalat valamely szögnek megharmadozására is igen ügyesen felhasználta.



E czélból a φ szög egyik szárára AB merőlegest állítunk (l. ábra); ezt a vonalat felhasználjuk oly kagylóvonal állandó egyeneséül, melynek polusa az O pont és melynek állandó távolsága: az $OB = b$ átfogónak a kétszerese; a kagylóvonal C pontban metszi a B ponton keresztül, az OA-val vont párhuzamost; kössük össze még a C pontot O-val, akkor a $COA\sphericalangle = \alpha$ máris a φ szögnek harmadrésze. Ezt könnyen bebizonyíthatjuk: legyen az OC metszési pontja az AB-vel: D, akkor a feltétel szerint $CD = 2b$; ha pedig e CD egyenes középpontját E-vel jelöljük, akkor azt látjuk, hogy a BCE és OBE háromszögek egyenlőszárúak; a BCE háromszögben a két egyenlő szög: $BCE\sphericalangle = CBE\sphericalangle = \alpha$; mivel pedig a $BED\sphericalangle$ a $BEC\sphericalangle$ mellékszöge, azért az OBE háromszögben a két egyenlő szög: $BED\sphericalangle = BOD\sphericalangle = 2a$. Végre pedig $BCE\sphericalangle = AOD\sphericalangle = \alpha$, mint belváltószögek s így csakugyan $\varphi = 3\alpha$.