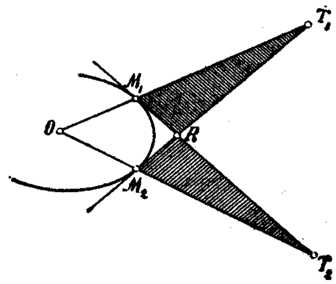
Apollonius.

A *III. könyv* sok és nevezetes tételt tartalmaz,
melyek bizonyos feladatok megoldásánál hasznosaknak
bizonyulnak, valamint olyanoknál is, melyek mértani
helyekre vezetnek; ezek közül a legtöbbje igen szép és új is.

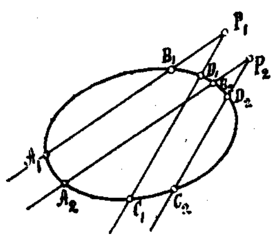
E könyv 1. tétele így szól: vegyünk fel a kúpszeleten két pontot: M_1 és M_2 (1. ábra) és rajzoljuk meg mindkét ponthoz az érintőket; kössük továbbá össze e pontokat a kúpszelet középpontjával: O-val és hosszabbítsuk meg ez egyeneseket mindaddig, míg az OM_1 meghosszabbítása az M_2 ponthoz tartozó érintőt T_1-ben és az OM_2 meghosszabbítása az M_1 ponthoz tartozó érintőt T_2-ben metszi; ha még az érintők metszési pontját R-rel jelöljük, akkor az M_1RT_1 *háromszög területe egyenlő az* M_2RT_2 *háromszögével.*



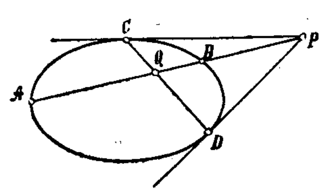
A következő 43 tétel mind evvel az elsővel áll összefüggésben. Ezek közül a legnevezetesebb a következő két tétel: vonjunk P_l pontból a kúpszelethez (l. ábra) két szelőt: A_1B_1 és C_1D_1; akkor a tétel értelmében

$$\frac{P_1A_1 \cdot P_1B_1}{P_1C_1 \cdot P_1D_1} = \frac{P_2A_2 \cdot P_2B_2}{P_2C_2 \cdot P_2D_2},$$

ha egy másik P_2 pontból vont szelők megfelelően párhuzamosak a P_1-ből vont szelőkkel.



A másik tétel pedig így szól: rajzoljunk P pontból a kúpszelethez egy AB szelőt (l. ábra) és szerkesszük meg ugyancsak a P pontból a kúpszelethez a két érintőt is: PC és PD.



Ha az AB és CD szelők metszési pontja Q, akkor az $A,\ B,\ P$ és Q *pontok harmonikus metszést alkotnak vagyis*:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}.$$

A 45. tételben Apollonius a kúpszeletek gyújtópontjairól szól, ámbár nem ad nekik megfelelő határozott nevet, hanem csak e nem igen sokat mondó kifejezést használja: $\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ $\acute{\iota}\chi$ $\tau\eta\rho$ $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta\rho$ (pontok, melyek a felületvetésből származnak). Nevezetes azonban az, hogy a parabolának az egy gyújtópontjáról nem tesz említést; a másik két kúpszeletre nézve pedig azt a tételt mondja ki, hogy a gyújtópont oly tulajdonságú, hogy a nagy tengelynek általa elmetszett szeleteinek téglalapja egyenlő a fél nagy tengely és a fél parameter által alkotott téglalappal vagy pedig továbbá a fél kis tengelyre rajzolt négyzettel.

A 48. tétel azt mondja, hogy a kúpszelet bármely kerületi pontjához vont radius vectorok az illető ponthoz tartozó érintővel egyenlő szögeket zárnak be.

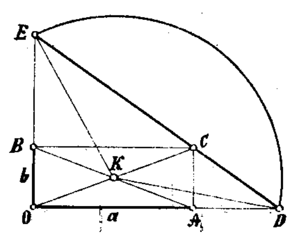
Az 52. tétel az ellipsisnek azt az alapvető definícióját mondja ki, hogy a radius vectorok összege akkora, mint a nagy tengely és ennek alapján az ellipsist oly vonalnak jelenti ki, melynek minden pontja oly két kör metszési pontja, melyeknek sugarai együttvéve az ellipsis nagy tengelyét adják.

Apollonius ezek után a hyperbolára vonatkozó analog tételeket adja meg és a parabolának ama tételével, hogy annak minden pontja egy adott ponttól és egy adott egyenestől egyenlő távolságban van, befejezi a III. könyvet.

"A *IV. könyv* a kúpszeleteknek egymással való
összekapcsolását tárgyalja, hogy hányféle módon
találkozhatnak egymással vagy a körrel, és még sok
egyebet; a miről elődeinktől nem maradt ránk semmi."

A kúpszeletek találkozása alatt azok metszése és érintkezése értendő; erre vonatkozólag Apollonius kiemeli, hogy két kúpszelet négy pontban metszheti egymást vagy hogy két kúpszeletnek két metszési és egy érintési pontja lehet, esetleg egészben csak két érintési pontja; továbbá hogy két parabolának csak egy érintési pontja lehet, valamint egy parabolának és egy hyperbolának is, a mikor a parabola a hyperbolán kívül fekszik és ugyancsak egy érintő pontja van a parabolának és az ellipsisnek, a mikor az ellipsis kívülről érinti a parabolát.

Apollonius a delosi problemával is foglalkozott és a két adott egyenes közé beékelendő két középarányos megszerkesztésére a következő módot ismertette: szerkesszünk az $OA = a$ és $OB = b$ oldalakkal $AOBC$ téglalapot (1. ábra) és rajzoljunk e téglalap középpontjához: K-hoz, mint körközépponthoz oly körívet, hogy annak az OA és OB meghosszabbításával való D és E metszési pontjait összekötő húrja a C ponton is menjen keresztül.



Az a és b közé ékelt középarányosok ekkor BE és AD lesznek, úgy hogy:

$$a : BE = BE : AD = AD : b.$$

"Az *V. könyv* tüzetesen foglalkozik a
leghosszabb és a legrövidebb vonalak tanával."

Az V. könyvben azokról a leghosszabb és legrövidebb vonalokról van szó, melyeket a kúpszeletekhez az azokon kívül vagy belül fekvő pontokból lehet húzni; mindegyik esetben a feladat az illető kúpszelet és ama kör érintésére vezethető vissza, mely körnek középpontja az illető adott pont. A könyv elején azokkal elemi esetekkel foglalkozik, a mikor az adott pont a kúpszelet tengelyeiben fekszik, de később az adott pont általános fekvésének esetében Apollonius bámulatos virtuozitást fejt ki a megoldási módszerek alkalmazásában. Ezek után a kúpszeletek subnormálisával foglalkozik. Ha bármely görbe egyik pontjában az e ponthoz tartozó érintőre merőlegest rajzolunk, e merőlegesnek az illető ponttól egészen a tengellyel való metszési pontjáig terjedő részét *normális*-nak nevezzük; e normálisnak a tengelyre eső vetülete pedig a *subnormális*. Apollonius V. könyvének egyik tétele arról szól, hogy a parabola subnormálisa mindig állandó és pedig $\frac{p}{2}$, hogy ha a parabola egyenlete: $y^2 = px$.