II. Középpontos kúpszeletek

I. *definíczió. A középpontos kúpszelet geometriai helye mindazon pontoknak, melyek adott körtől (vezérkör: F_1) és adott ponttól (gyújtópont: F_2) egyenlő távolságra vannak.*

A szerkesztés a definíczió alapján a következőként történik: A vezérkör valamely P' pontját összekötjük F_2-vel. Az F_2P'-re P_1 felezéspontjában állított merőleges az F_1P'-t a görbe P pontjában metszi.

Bizonyítás.

$$PP_1P'\triangle \cong PP_1F_2\triangle,$$

tehát

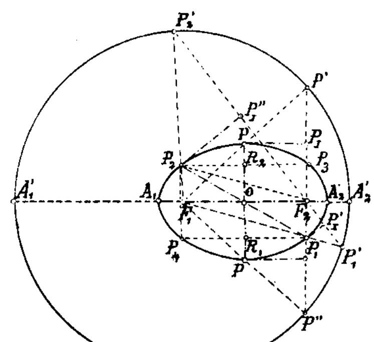
$$PP' = PF_2.$$

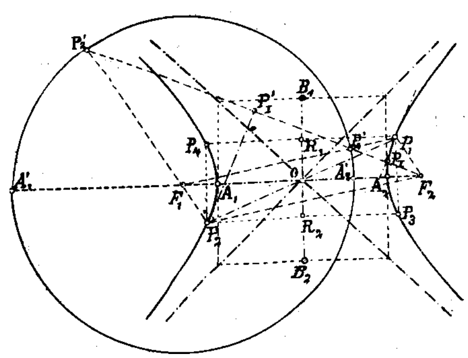
Ha F_1F_2 a vezérkört az A_1' és A_2' pontokban metszi, akkor az F_2A_1' és F_2A_2' távolságok felezéspontjai (A_1 és A_2) szintén pontjai a görbének és

$$A_1A_2 = \frac{A_2'F_2}{2} + \frac{A_1'F_2}{2} = \frac{A_1'A_2'}{2} = 2a$$

Ha a P' és P'' pontokat úgy vesszük fel a vezérkörön, hogy $P'P'' \perp F_1F_2$, és megszerkesztjük a nekik megfelelő P és P pontokat, akkor ezek az F_1F_2-től egyenlő távolságra feküsznek, tehát :

I. *tétel. Az F_1F_2 egyenes tengelye a kozénpontos kúpszeletnek.*





II. *definiczió. Az A_1A_2 távolságot a középpontos kúpszelet főtengelyének nevezzük.*

II. *tétel. A főtengely hossza ($A_1A_2 = 2a$) egyenlő a vezérkör sugarával.*

Ha pedig a P_1' és P_2' pontokat úgy vesszük fel, hogy a $P_1'P_2'$ átmenjen az F_2 fokuson és a P_1P_2 az F_1F_2-t O-ban metszi; az $F_1P_1F_2P_2$ parallelogramma, mert a $P_1'F_1P_2'$ egyenlőszárú háromszögben

$$F_2P_1'P_1\sphericalangle = F_1P_2'F_2\sphericalangle,$$

tehát

$$P_1'F_2P_1\sphericalangle = F_1P_2'F_2\sphericalangle$$

és

$$P_2'F_2P_2\sphericalangle = F_1P_1'F_2\sphericalangle$$

vagyis

$$F_1P_1 \parallel F_2P_2$$

és

$$P_1F_2 \parallel P_2F_1.$$

Az O tehát a főtengely felezéspontjában fekszik és

$$OP_1 = OP_2, \text{ tehát}$$

III. *tétel. A főtengely felezőpontja a középpontos kúpszelet középpontja.*

Jogosan neveztük tehát ezen kúpszeleteket a parabolával szemben középpontos kúpszeleteknek.

Az I. tétel alapján a P_1 és P_2 tükörképei (P_3 és P_4) a főtengelyre vonatkozólag szintén a görbén vannak. Ha P_1P_4 és P_2P_3 az O-ban a főtengelyre állított merőlegest az R_1 és R_2 pontokban metszik, akkor:

$$P_1R_1 = P_4R_1$$

és

$$P_2R_2 = P_3R_2,$$

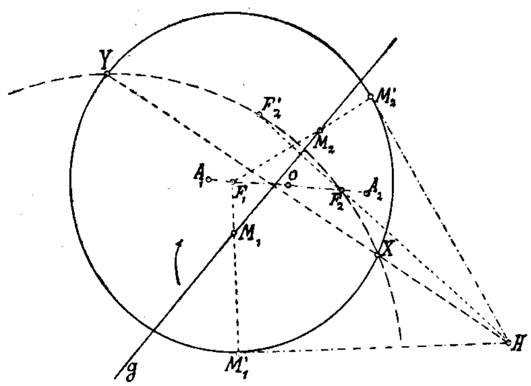
tehát:

IV. *tétel. A középpontos kúpszelet középpontjában a főtengelyre állított merőleges szintén tengelye a görbe vonalnak.*

I. feladat. Keressük valamely egyenes (g) és egy meg nem rajzolt középpontos kúpszelet metszéspontjait.

Megoldás. Ha g a görbét pl. M-ben és F_1M a vezérkört M'-ben metszi, akkor: $MM' = F_2M$ (I. definiczió). Ha pedig F_2-nek g-re vonatkozó tükörképe F_2', akkor: $MF_2 = MF_2'$. Az M tehát oly kör középpontja, a mely átmegy az F_2, F_2' és M' pontokon. Ez a kör azonban érinti is a vezérkört, mert M' a két kör centrálisán (F_1M) van.

Az adott egyenes és görbének minden metszéspontja tehát középpontja oly körnek, a mely átmegy a két ismert F_2 és F_2' pontokon és érinti a vezérkört.



A probléma megoldása tehát a következőként történik: Rajzolunk kört, mely átmegy az F_2 és F_2' pontokon és a vezérkört pl. az X, Y pontokban metszi. XY és $F_2F_2'H$ metszéspontjából megrajzoljuk a vezérkörhöz a HM_1' és HM_2' érintőket. Az F_1M_1' és F_1M_2' a g-t a keresett M_1 és M_2 pontokban metszi.

A bizonyítás egyszerűen azon az alapon eszközölhető, hogy három kör, hatványvonalai (F_2F_2', XY és HM_1' vagy HM_2') egy pontban (H) metszik egymást.

Minthogy egy pontból a körhöz legfeljebb két érintő húzható, tehát legfeljebb két metszéspont van, tehát:

V. *tétel. A középpontos kúpszelet másodrendű görbe vonal.*

Mi történik, ha g-t az M_1 körül a nyíl irányában forgatom? Az M_2 folyton közeledik az M_1-hez, az F_2' pedig az $F_2F_2'M_1'$ körön a M_1'-hez. A g egy meghatározott határhelyzethez közeledik és mikor F_2' összeesik M_1'-gyel, akkor H is M_1'-be jön, tehát g-nek a görbe vonallal való M_2 metszéspontja beleesett az M_1-be. A g-ből tehát a t érintő lett. Tehát:

VI. *tétel. A középpontos kúpszeletnél a fokusnak (F_2) az érintőre vonatkozó tükörképeinek (F_2') geometriai helye a vezérkör.*

Ha a fokusból az érintőre bocsátott merőleges talppontja M_1, akkor :

$$OM_1 : F_1M_1' = F_2O : F_2F_1 = 1 : 2,$$

vagyis

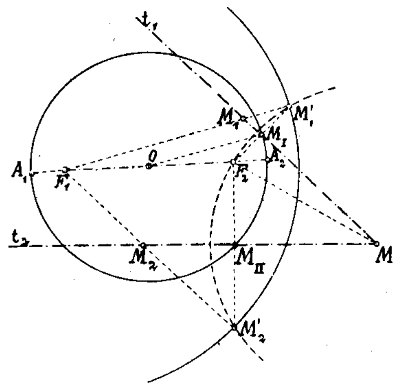
$$OM_1 = \frac{F_1M_1'}{2} = a,$$

tehát:

VII. *tétel. A fokusból az érintőre bocsájtott merőleges talppontjának (M_1) geometriai helye oly kör, melyet a középpontos kúpszelet középpontja körül a főtengely felével rajzolunk. Ezt a kört, mely a görbe vonal csúcsain (A_1 és A_2) áthalad, főkörnek nevezzük.*

II. feladat. Rajzoljunk a középpontos kúpszelet M_1 pontjában érintőt.

Megoldás. Az F_1M_1 messe a vezérkört M_1'-ben, F_2M_1' pedig a főkört M_1-ben, akkor M_1M_I lesz az érintő.



Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 pontokban rajzolt érintők egymást M-ben metszik, akkor, ha F_1M_1, illetőleg F_1M_2 a vezérkört az M_1', illetőleg M_2' pontokban metszik:

$$MM_1' = MF_2 = MM_2',$$

tehát M_1', M_2' és F_2 oly kör kerületén feküsznek, melynek középpontja a két érintő metszéspontja M. Ennek alapján könnyű megoldani a következő feladatot:

III. feladat. Adott pontból rajzoljunk a középpontos kúpszelethez érintőket.

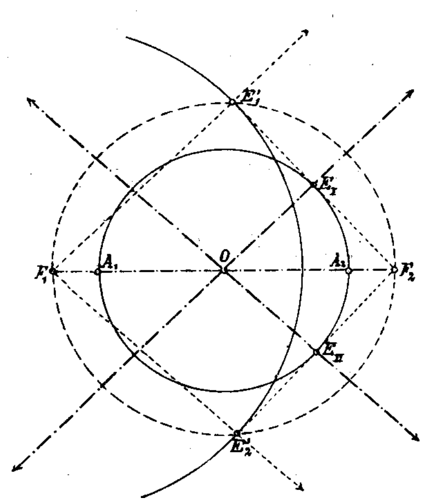
Megoldás. Az adott M pont körül MF_2 radiussal rajzolt kör a vezérkört messe M_1' és M_2' pontokban. Ha az F_2M_1' és F_2M_2' a főkört az M_I és M_{II}-ben metszik, akkor MM_I és MM_{II} lesznek a keresett érintők. A hol pedig F_1M_1' illetőleg F_1M_2' az MM_I illetőleg az MM_{II} érintőket metszi, kapjuk az M_1 és M_2 érintési pontokat.

A továbbiakban tárgyalásaink kettéválnak. Már a szerkesztésnél is észrevehető ugyanis, hogy a szerint, a mint a gyújtópont a vezérkörön belül vagy kívül fekszik, lényegesen különbözők a görbe vonalak. Az első esetben (ellipsis) ugyanis a görbe vonal minden pontjával a főkörön belül fekszik, a második esetben (hyperbola) pedig a főkörön kívül. Vagyis :

VIII. *tétel. Az ellipsis zárt görbe.*

Az ellipsis középpontjából nem lehet az ellipsishez érintőket rajzolni, a hyperbolánál pedig lehet.

IX. *tétel. A hyperbola középpontjából rajzolt érintők a hyperbolát a végtelenben érintik, azért ezeket végérintőknek vagy asymptotáknak is hívjuk.*



Bizonyítás. Ha az OF_2 radiussal rajzolt kör az ellenkört E_1' és E_2' pontokban metszi, akkor F_2E_1' és F_2E_2' érintik a főkört, még pedig E_I és E_{II}-ben. OE_I és OE_{II} az érintők, tehát

$$F_2E_IO\sphericalangle = F_2O_{II}O\sphericalangle = 90°.$$

Ámde

$$F_2E_1'F_1\sphericalangle = F_2E_2'F_1 = 90°,$$

tehát

$$OE_I \parallel F_1E_1'$$

és

$$OE_{II} \parallel F_1E_2',$$

vagyis az érintési pontok tényleg a végtelenben vannak.

X. *tétel. A hyperbola tehát nyÍlt kétágú görbe.*

Az ellipsisnél a melléktengely metszi a görbét (P-ben), a hyperbolánál pedig nem.

Ha az ellipsis melléktengelyének hosszát P_1P-t $2b$-vel és az F_1F_2 távolságot, melyet excentricitásnak nevezünk, $2c$-vel jelölöm, akkor az OF_1P derékszögú háromszögben

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A hyperbolánál is szoktunk melléktengelyről beszélni és ilyenkor a melléktengely B_1 és B_2 végpontjait úgy nyerjük, hogy

$$A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = A_2B_2 = c$$

vagyis a hyperbolánál:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Végül ha a görbe vonal pontjait az $F_1,\ F_2$-vel összekötő távolságokat (r_1 és r_2) rádiusvektoroknak nevezzük, akkor: az ellipsisnél

$$r_1 + r_2 = 2a$$

és a hyperbolánál

$$r_1 - r_2 = 2a.$$

Az eddigiek alapján oldjuk meg a következő feladatokat:

932. Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{\text{ellipsis}}{\text{hyperbola}}$ érintője felezi a radius vektorok által bezárt $\dfrac{\text{szög mellékszögét}}{\text{szöget}}$.

933. Mutassuk ki, hogy az $\dfrac{\text{ellipsisnél}}{\text{hyperbolánál}}$ a radius vektorok $\dfrac{\text{összege}}{\text{különbsége}}$ egyenlő a vezérkör sugarával.

934. Mutassuk ki, hogy minden középpontos kúpszeletnek két fokusa és két vezérköre van.