I. *definíczió.* Azt az egyenest, mely valamely görbét metsz, a görbe *szelőjének*, (secans) nevezzük.

II. *definíczió.* Ha valamely görbe P_1P_2 szelőjét a P_1 pont körül úgy forgatjuk, hogy P_2 folyton közeledik P_1-hez, akkor a P_1P_2 szelőnek azt a határhelyzetét, a melyben P_2 a P_1-gyel összeesik, *érintőnek* nevezzük. P_1 pedig az *érintési pont.*

III.*definíczió.* Valamely görbe P_1 és P_2 pontjait összekötő távolságokat húrnak nevezzük

IV. *definíczió.* Ha található oly egyenes, illetőleg pont, melyhez képest az adott görbe pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, akkor azt a görbe *tengelyének*, illetőleg *középpontjának* (o) nevezzük.

V. *definíczió.* Valamely görbe lehet *véges* vagy *végtelen nagy* és *zárt* vagy *nyílt.* A véges görbe pontjai egy meghatározott területen belül vannak, míg a végtelen görbének pontjai meghatározott terület belsejébe nem zárhatók. A zárt görbe oly véges görbevonal, a mely a síkból véges területet vág ki. Minden más görbét nyílt görbének nevezünk.

VI. *definíczió.* Valamely görbe lehet *egy* vagy *többágú*, a mint egy vagy több egymással össze nem függő részből áll.

VII. *definíczió.* Valamely görbét n-ed *rendűnek* nevezünk, ha valamely egyenes azt legfeljebb n pontban metszi és n-ed osztályúnak, ha valamely pontból legfeljebb n érintő húzható a görbéhez.

A következőkben oly görbéket fogunk tárgyalni, a melyek a kúpnak síkmetszeteinél jönnek létre,- miért is közös néven kúpszeleteknek nevezzük.

A kúpszeletek parabolák, ellipsisek vagy hyperbolák lehetnek. Legelőször a parabolával fogunk megismerkedni.

I. A parabola.

I. *definíczió.* A sík azon pontjainak mértani helyét, melyek adott egyenestől (*vezérvonal, directrix*: V_1V_2) és adott ponttól (*gyújtópont focus: F)* egyenlő távolságra vannak, *parabolának* nevezzük.

A parabola valamely P pontjának szerkesztése a definíczió alapján a következőként történik: A focusból a vezérvonalra bocsájtott FA' merőlegesen tetszésszerint felvett P'' pontban merőlegest állítunk FA'-re és az $A'P''$-vel, mint sugárral kört rajzolunk F körül. Az így nyert P_1 és P_2 metszéspontok pontjai a parabolának.

Bizonyítás: Ha a következőkben a sík bármely (pl. M) pontjából a V_1V_2 illetőleg az FA'-re bocsájtott merőleges talppontját M' illetőleg M''-mel jelöljük, akkor a nyert P_1 és P_2 pontok esetében P_1'' és P_2'' egybeesik P''-vel és

$$P_1P_1' = A'P'' = FP_1$$

és

$$P_2P_2' = A'P'' = FP_2.$$

Vagyis az I. definíczió alapján a P_1 és P_2 tényleg pontjai a parabolának.

I. *tétel.* A focusból a directrixre bocsájtott merőleges $(A'F)$ tengelye a parabolának.

Bizonyítás: Az P_1FP'' és a P_3FP'' háromszögek egybevágóságából ugyanis következik, hogy:

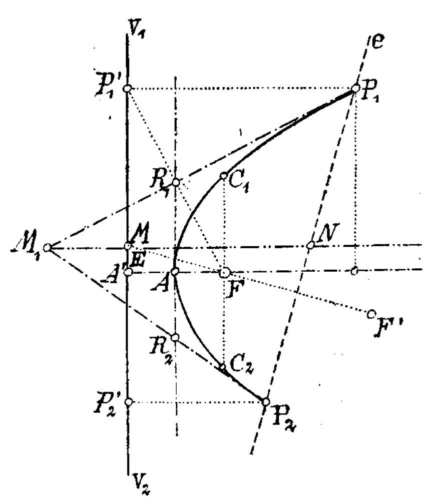
$$P_1P_1'' = P_1P'' = P_2P'' = P_2P_2''.$$

II. *definíczió*: Ha a focuson átmenő merőlegesen a parabola C_1 és C_2 pontja fekszik, akkor a

$$C_1C_2 = 2A'F = 2p$$

távolságot a parabola *paraméterének* nevezzük.

Ha A az $A'F$ felezéspontja, akkor a rajta átmenő merőlegesen a parabolának csak egy pontja van: A, mert az $A'A$ sugarú F-ből rajzolt kör csak érinti a merőlegest.



III. *definíczió.* A focusból a directrixre bocsájtott merőleges távolság ($A'F$) felezéspontját, A-t a parabola csúcsának és az ezen pontban a tengelyre merőlegesen álló egyenest *csúcsérintőnek* nevezzük.

Az eddigiekből máris következik, hogy:

II. *tétel.* A parabola vezérvonala és csúcsérintője párhuzamosak, és

III. *tétel.* A parabola csúcsérintője felezi a focust a vezérvonal valamely pontjával összekötő távolságot.

Ha a P"-t az A-tól balra vesszük fel, akkor metszéspontot nem is kapunk már, mert

$$A'P" < FP".$$

A-tól jobbra pedig akármilyen messze is menjünk, mindig kapunk metszéspontot, tehát:

IV. *tétel.* A parabola csúcsérintőjének jobboldalán végtelenig elterjedő tehát *nyílt, egyágú görbevonal.*

IV. *definíczió.* Valamely P pontról akkor mondjuk, hogy a parabolán kívül vagy belül van, ha:

$$PP' \lesseqgtr PF.$$

V. *tétel.* Valamely egyenes akkor metszi a parabolát, ha találhatunk rajta oly P és Q pontokat, hogy:

$$PP' < PF \tag{1}$$

és

$$QQ' > QF. \tag{2}$$

Bizonyítás: Az (1) feltétel értelmében az egyenesnek van a parabolán kívül, a (2) értelmében pedig van a parabolán belül is pontja. A P-ből tehát csak úgy juthatunk Q-ba, ha egyszer a parabolán is áthaladtunk.

V. *definiczió.* Ha valamely húrt egyik végpontja körül addig forgatunk, míg a tengellyel párhuzamos nem lesz, akkor *átmérőt* kapunk.

VI. *tétel.* A parabola *összes átmérői párhuzamosak.*

I. *feladat.* Legyen adva a parabola focusa és direcrixe által. Szerkesszük meg a parabola és egy adott e egyenes metszéspontjait.

Ha a metszéspontok egyikét P-vel és az F-nek e-re vonatkoztatott tükörképét F'-tel jelölöm, akkor:

$$PF' = PF = PP_1 \text{ és } PP' \perp V_1V_2.$$

A P tehát oly kör középpontja, a melynek FF' húrja és V_1V_2 érintője, tehát ha FF' a V_1V_2-t M-ben metszi, akkor :

$$\overline{MP'}^2 = MF \cdot MF'$$

Az MP'-t megszerkesztvén, azt M-ből a directrixek mindkét oldalára rávihetjük, miáltal a P_1' és P_2' pontokat nyerjük. A P_1' és P_2'-ben a V_1V_2-re állított merőlegesek az e-t a P_1 és P_2 keresett metszéspontokban találják.

Feladatunknak legfeljebb két megoldása lehet, tehát:

VII. *tétel*: A *parabola másodrendű görbe.*

VIII. *tétel.* Ha valamely egyenes olyan helyzetű, hogy a focusnak reá vonatkozó tükörképe a vezérvonal baloldalára esik, akkor az egyenes nem metszi a parabolát.

Bizonyítás. Ebben az esetben V_1V_2 vezérvonal metszené az FF' húrt, a mi lehetetlen.

Ha már most a P_1P_2-t a szilárd P_1 körül a nyíl irányában forgatom, akkor P_2 mindig közelebb jut P_1-hez. Mi történik F'-tel?

A míg P_2 a P_1 alatt van, addig bármilyen közel is jussunk P_1-hez, az F' a P_1 középpontú P_1F sugarú körön mindig P_1'-n alul van. Ha pedig P_2 a P_1 fölött van, akkor bármilyen közel is feküdjék P_1 -hez, az F' mégis a P_1'-n felül van. Ha tehát P_2 éppen P_1-ben van, akkor F' és vele M is összeesik P_1'-el, vagyis :

IX. *tétel.* A *parabola focusúnak az érintőre vonatkozó tükörképének mértani helye a directrix.*

Megfordítva: Ha F' a directrixen van, akkor $MF' = 0$ tehát

$$MP_1' = MP_2' = 0,$$

vagyis a metszéspontok egybeesnek.

X. *tétel.* A *focusnak az érintőre vonatkozó projekcziójának mértani helye a csúcsérintő.*

Bizonyítás. Ha a P_1 pontban rajzolt érintő az FP_1'-t R_1 pontban metszi, akkor

$$P_1P_1'R_1\triangle \cong P_1FR_1\triangle$$

mert

$$P_1F = P_1P_1';\ \ P_1R_1 = PR_1 \ \text{ és }\ P_1R_1P_1'\sphericalangle = P_1R_1F\sphericalangle = 90°$$

tehát

$$FR_1 = P_1'R_1$$

tehát a III. tétel értelmében R_1 a csúcsérintőn fekszik. És minthogy még:

$$P_1'P_1R_1\sphericalangle = FP_1R_1\sphericalangle = \frac{FP_1P_1'\sphericalangle}{2}, \quad \text{azért :}$$

XI. *tétel.* A *parabola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó vezérsugár* (FP_1) *és az átmérő által bezárt szög mellékszögét.*

II. *feladat.* Rajzoljunk a parabola P_1 pontjában érintőt.

Megoldás. $P_1'F$ messe a csúcsérintőt R_1-ben, akkor P_1R_1 lesz az érintő. (VIII. és IX. tétel.)

Ha P_2-ben is rajzolunk érintőt és a P_1R_1 és P_2R_2 érintők metszéspontját M_1-gyel jelöljük, akkor:

$$M_1P_1' = M_1F = M_1P_2'$$

Ezen tulajdonság alapján könnyen megoldható a következő feladat.

III. *feladat.* Valamely a parabolán kívül fekvő M_1 pontból rajzoljunk érintőt a parabolához.

Megoldás: M_1-ből az M_1F sugárral rajzolt kör messe a V_1V_2-t és P_1' és P_2'-ben, az FP_1' és az FP_2' pedig messék a csúcsérintőt R_1 és R_2-ben; akkor M_1R_1 és M_2R_2 lesznek a keresett érintők. Az érintési pontok (P_1, P_2) a P_1' és P_2'-ben a V_1V_2-re emelt merőlegesek és az érintők metszéspontjai lesznek. Minthogy egy kör és egy egyenes legfeljebb 2 pontban metszhetik egymást, tehát következik, hogy:

XII.*tétel.* A parabola másodosztályú görbe.

XIII. *tétel.* Ha valamely M_1 pontból megrajzoljuk az M_1P_1 és M_1P_2 érintőket, akkor az M_1 ponton átmenő átmérő felezi a P_1P_2 érintési húrt N-ben és $P_1M_1F\sphericalangle = P_2M_1N\sphericalangle$.

Bizonyítás. (a) Messe az M_1N a V_1V_2-t E-ben, akkor

$$EP_1' = EP_2',$$

mert $M_1E \perp P_1'P_2'$ és $M_1P_1' = M_1P_2'$. Ha még tekintetbe vesszük azt is, hogy

$$P_1P_1' \parallel EN \parallel P_2P_2',$$

akkor

$$P_1N : P_2N = P_1'E : P_2'E$$

vagyis

$$P_1N = P_2N.$$

(b)

$$M_1P_2P_2'\sphericalangle = FP_2'P_1'\sphericalangle,$$

mert száraik merőlegesek egymásra.

Ámde az M_1 középpontú M_1F sugarú körben

$$FP_2'P_1'\sphericalangle = \frac{FM_1P_1'\sphericalangle}{2} = FM_1P_1\sphericalangle$$

másrészt:

$$P_2M_1N\sphericalangle = M_1P_2P_2'\sphericalangle,$$

tehát

$$P_1M_1F\sphericalangle = P_2M_1N\sphericalangle.$$

A X., XII. tétel és a III. feladat alapján könnyen megoldható a következő:

IV. *feladat.* Szerkesszük meg a parabola directrixét és focusát, ha ismerjük két érintőjét és rajtuk fekvő 2 érintési pontot.

XIV. *tétel. A párhuzamos húrok felezéspontjainak mértani helye egy a húrokhoz konjugált átmérő.*

Bizonyítás. Legyen P_1P_2 az egyik húr, akkor (I. feladat) M felezi a $P_1'P_2'$ távolságot, tehát az M-en átmenő átmérő felezi P_1P_2-t. S minthogy az összes P_1P_2-vel párhuzamos húrokra vonatkozólag M ugyanaz, tehát a tétel igaznak bizonyult.

XV. *tétel. Valamely átmérő végpontjában rajzolt érintő párhuzamos az átmérőhöz konjugált húrokkal.*