A gyökképlet alapján

$$x_{1,2}=\frac{4n^2\pm\sqrt{16n^4-4n^2(4n^2-1)}}{2(4n^2-1)}=\frac{n(2n\pm 1)}{(2n-1)(2n+1)},$$

és így

$$x_1=\frac{n}{2n+1},\quad x_2=\frac{n}{2n-1}.$$

Ha $n\neq 0$ és egész, e hányadosok nem egyszerűsíthetők, mert n mindkét nevezőhöz relatív prím.[1]

Véges tizedes törtként csak azok a törtek írhatók fel, amelyeknek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevezőt törzsszámhatványok szorzataként írva benne csak 2 és 5 hatványai lépnek fel. Itt $2n+1$ és $2n-1$ páratlanok, ezért x_1 és x_2 mindegyike csak akkor lenne véges tizedes tört, ha $2n+1$ és $2n-1$ az 5 valamely (nem negatív egész kitevőjű) hatványa lenne, esetleg mínusz előjellel ellátva. 5 hatványai (pozitív kitevő esetén) 5-nek többszörösei, tehát két ilyen különbsége (bármilyen előjelpár esetén) szintén, márpedig $(2n+1)-(2n-1)=2$. Az sem lehet, hogy a nevezők egyike $+1$, vagy -1 legyen, másika pedig 5^k, ahol $k>0$, mert $\pm 5^k$ és ± 1 különbsége 4-re vagy 6-ra végződik. Végül a $2n-1=-1$ és $2n+1=+1$ feltevés a kizárt $n=0$ esetre vezet. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szilvási Márta (Budapest, Ságvári E. lg. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az állítást a gyökök felírása nélkül is bebizonyíthatjuk. Ha x_1 és x_2 véges tizedes törtek volnának, akkor összegük, $4n^2/(4n^2-1)$ is az lenne. Ez a tört sem egyszerűsíthető, mert szomszédos számok relatív prímek. A nevező a kizárt $n=0$ eset kivételével pozitív, továbbá páratlan és nem lehet 5^k-nal egyenlő $k>0$ mellett, mert így $k=1$ esetén 5-tel egyenlő, $k>1$ mellett 25-re végződnék, így pedig $4n^2$ egyenlő lenne 6-tal, ill. végződése 26 lenne, ami nem osztható 4-gyel. Hasonlóan $4n^2-1=1$-ből $4n^2=2$-re jutnánk.

Az sem lehetséges, hogy $x_1x_2=n^2/(4n^2-1)$ véges tizedes tört legyen, ez pedig szükséges lenne ahhoz, hogy x_1 és x_2 mindegyike véges tizedes tört legyen.

Homitsky Lajos (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

[1] Ugyanis a B/A tört csak B és A közös osztóival egyszerűsíthető, és ha az A és B (egész) számoknak a d (egész) szám közös osztója, vagyis $A=d\cdot A'$ és $B=d\cdot B'$ (ahol A', B' egész), akkor d az $A-2B=d(A'-2B')$ számnak is osztója. Már most $A=2n\pm 1$ és $B=n$-nel $A-2B=\pm 1$, eszerint A és B-nek csak $+1$ és -1 közös osztója.