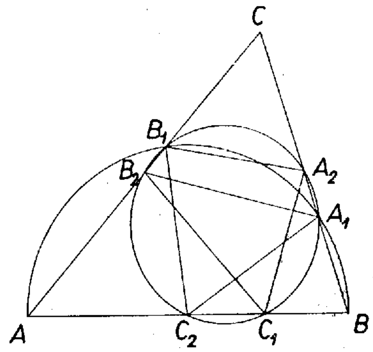
Előzetes megjegyzés. Feltesszük, hogy a kérdéses területek 0-tól különbözők. Ez csak akkor nem áll fenn, ha egy csúcs vetülete egybeesik egy másik csúccsal; ilyenkor a 2-ik csúcsnál derékszög van és a 3-ik csúcs vetülete is ide esik, ezért két terület értéke 0, az állítás érvényes, de semmitmondó, mert mindkét oldala 0. Pl. ha $A_1 \equiv C$, akkor $ACB\sphericalangle = 90°$, $B_1 \equiv C$, ezért $t_{c1} = t_{c2} = 0$.



I. megoldás. B_1 az AB átmérő fölötti Thalész–körön van, amelynek középpontja C_2, ezért $AB_1C_2\triangle$ egyenlő szárú. Ugyanez áll $AC_1B_2\triangle$-re. E háromszögekben az alapon fekvő szögek egyike közös (a $BAC\sphericalangle$, vagy ha ez tompaszög, akkor a külső szöge), tehát a háromszögek hasonlók. Száraik aránya – a szokásos jelölésekkel – $AC_2 : AB_2 = c : b$, ezért területeik aránya $c^2 : b^2$. Hasonló eredményt kapunk a további kérdéses háromszögeknek azokról a párjairól, melyekben a közös csúcs B, ill. C. Most már a

$$\frac{t_{a1}}{t_{a2}} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{t_{b1}}{t_{b2}} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{t_{c1}}{t_{c2}} = \frac{b^2}{a^2}$$

egyenlőségek összeszorzásával kapjuk, hogy az állításban szereplő két szorzat hányadosa 1, a szorzatok egyenlők. Ezt kellett bizonyítanunk.

Fodor János (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az AB_1C_2 és $CB_1A_2\triangle$-ek AB_1, ill. CB_1 oldalához tartozó magassága egyenlő (a BB_1 magasság fele), ezért területeik aránya egyenlő az alapok arányával. Ugyanezt a BC_1A_2 és AC_1B_2, valamint a CA_1B_2 és BA_1C_2 háromszögpárokra felírva és az egyenlőségeket összeszorozva:

$$\frac{t_{a1}}{t_{c2}} \cdot \frac{t_{b1}}{t_{a2}} \cdot \frac{t_{c1}}{t_{b1}} = \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1}. \tag{1}$$

A B, C, B_1, C_1 pontok húrnégyszöget határoznak meg, ezért a szögek egyenlősége alapján az $AB_1C_1\triangle$ hasonló $ABC\triangle$-höz, tehát a jobb oldal első tényezője egyenlő $AB/AC = c/b$-vel. Hasonlóan a további két tényező egyenlő $BC/BA = a/c$-vel ill. $CA/CB = b/a$-val, így a szorzat értékére ismét 1-et kapunk.

Kacsó András (Esztergom, Temesvári P. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pontok az $ABC\triangle$ Feuerbach–körén vannak. Felírva e körre az A, B, C pontokból húzott szelők szorzatának egyenlőségét:

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2, \quad BC_1 \cdot BC_2 = BA_1 \cdot BA_2, \quad CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$$

majd ezek szorzatát az $AB_2 = CB_2$, $BC_2 = AC_2$, $CA_2 = BA_2$ egyenlőségek alapján egyszerűsítve ismét kapjuk, hogy az (1) jobb oldalán álló számlálók szorzata egyenlő a nevezők szorzatával.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

2. Az állítás minden olyan esetben igaz, amikor A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 rendre a BC, CA, AB oldalegyenes olyan pontjai, amelyekre egyrészt az AA_1, BB_1, CC_1, másrészt az AA_2, BB_2, CC_2 egyenesek egy P_1, ill. P_2 ponton mennek át. Ekkor ugyanis a Ceva–tétel[1] szerint, X, Y, Z helyén előbb A_1, B_1, C_1-gyel, majd A_2, B_2, C_2-vel

$$(ABC_i) \cdot (BCA_i) \cdot (CAB_i) = \frac{AC_i \cdot BA_i \cdot CB_i}{C_iB \cdot A_iC \cdot B_iA} = 1, \quad (i = 1, 2) \quad \text{tehát}$$

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1,$$

$$AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2 = AB_2 \cdot BC_2 \cdot CA_2.$$

Ezeket összeszorozva, majd mindkét oldalt az α, β, γ szögek szinuszának feléből képezett szorzattal szorozva az egymás fölötti tényezőhármasok szorzatai rendre éppen az állításbeli területeket adják. – Esetünkben P_1-nek az $ABC\triangle$ magasságpontja, P_2-nek pedig a súlypontja felel meg.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

[1]Ha az $ABC\triangle$ BC, CA, AB oldalegyenesein rendre X, Y, Z olyan a $\triangle$ csúcsaitól különböző pontok, hogy az AX, BY, CZ egyenesek egy pontban találkoznak, akkor $(ABZ)\cdot(BCX)\cdot(CAY) = +1$, ahol (ABZ) az AZ és ZB irányított szakaszok hányadosát, a Z osztópontnak az A és B alappontokra vonatkozó ún. ***osztóviszonyát*** jelenti. Lásd pl. *Kárteszi Ferenc:* A Menelaos és a Ceva–féle tétel. K. M. L. 11 (1955) 67–75. o.