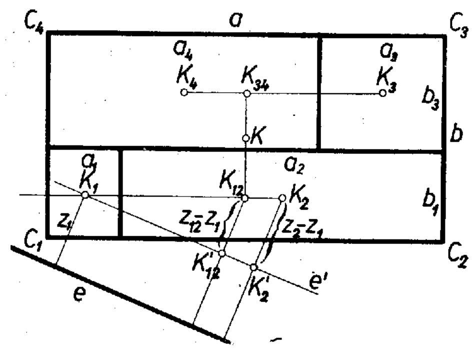
Legyen a $C_1C_2C_3C_4$ téglalapban $C_1C_2 = a$, $C_1C_4 = b$, és a középpont K, az első felosztás adta téglalapok szélessége b_1 és $b_3 = b - b_1$, ezek részeinek hossza a továbbosztás után a_1 és $a_2 = a - a_1$, ill. a_3 és $a_4 = a - a_3$ úgy, hogy a $t_1 = a_1b_1$, $t_2 = (a - a_1)b_1$, $t_3 = a_3b_3$, $t_4 = (a - a_3)b_3$ területű rész–téglalapoknak rendre egy–egy csúcsa C_1, C_2, C_3, C_4. Legyen végül középpontjuk rendre K_1, K_2, K_3, K_4, és az első felosztással létrejött $t_1 + t_2$, ill. $t_3 + t_4$ területű téglalapok középpontja K_{12}, K_{34}.



– Nyilvánvaló, hogy K_1, K_{12} és K_2, valamint K_4, K_{34} és K_3 egy–egy a C_1C_2-vel párhuzamos, ettől $b_1/2$, ill. $b - b_3/2$ távolságban levő egyenes pontjai, – továbbá hogy K_{12}, K és K_{34} az eredeti téglalap C_1C_4-gyel párhuzamos középvonalán vannak, vagyis C_1C_4-től $a/2$ távolságban, továbbá K_1, K_2, K_3, K_4 távolsága a C_1C_4 oldaltól rendre $a_1/2$, $a - a_2/2$, $a - a_3/2$, $a_4/2$; végül K távolsága C_1C_2-től $b/2$. Ezekkel $K_1K_{12} = (a - a_1)/2$ és $K_1K_2 = a/2$.

Legyen K_{12}-nek e-től mért távolsága z_{12}. Feltesszük, hogy e a K_1K_2 szakasz K_1-en túli meghosszabbítását metszi és nem derékszögben. Legyen K_{12} és K_2 vetülete a K_1-en átmenő, e-vel párhuzamos e' egyenesen K'_{12}, K'_2. Ekkor a $K_1K_{12}K'_{12}$ és $K_1K_2K'_2$ hasonló derékszögű háromszögekből $K'_{12}K_{12} : K'_2K_2 = K_1K_{12} : K_1K_2$, vagyis

$$(z_{12} - z_1) : (z_2 - z_1) = \frac{a - a_1}{2} : \frac{a}{2}, \text{ és így } a_1z_1 + (a - a_1)z_2 = az_{12}.$$

Az egyenlőséget b_1-gyel szorozva és a z távolságok együtthatóiban rendre t_1, t_2 és összegük: $t_1 + t_2 + t_{12}$ kifejezését felismerve

(2) $$t_1z_1 + t_2z_2 = (t_1 + t_2)z_{12} = t_{12}z_{12}.$$

Meggondolásunkat a K_3, K_4 és K_{34}, valamint a K_{12}, K_{34} és K középpontú téglalapokra megismételve nyerjük

(3) $$t_3z_3 + t_4z_4 = (t_3 + t_4)z_{34} = t_{34}z_4,$$

(4) $$t_{12}z_{12} + t_{34}z_{34} = (t_{12} + t_{34})z = tz.$$

(Ugyanis e két téglalaphármasban az első két téglalap ugyanúgy hézagtalanul és egyrétűen lefedi a 3-ik téglalapot, amint a K_1 és K_2 középpontú téglalapok azt, amelynek középpontja K_{12}.) Most már (2) és (3) összeadásával és a jobb oldalon (4) figyelembevételével a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

(2) – és vele (1) is – akkor is érvényes, ha e párhuzamos K_1K_2-vel, vagy merőleges rá. Ugyanis az első esetben $z_1 = z_2 = z_{12}$, ezért a $t_1 + t_2 = t_{12}$ egyenlőséget ezen közös értékkel szorozva kapjuk (2)-t, a másodikban pedig $z_2 = z_1 + K_1K_2 = z_1 + a/2$, és

$z_{12} = z_1 + K_1K_{12} = z_1 + (a - a_1)/2$, tehát

$$t_1z_1 + t_2z_2 = t_1z_1 + t_2z_1 + \frac{t_2a}{2} = (t_1 + t_2)z_1 + \frac{(a - a_1)b_1a}{2} = t_{12}z_1 + \\ + \frac{(a - a_1)t_{12}}{2} = t_{12}\left(z_1 + \frac{a - a_1}{2}\right) = t_{12}z_{12}.$$

Ha e metszi az eredeti téglalapot, akkor az állítás megjegyzés nélkül nem lehet érvényes, hiszen lehetséges, hogy e átmegy K-n, de a további középpontok egyikén sem, így pedig (1) bal oldala pozitív, jobb oldala 0, mert $z = 0$. Ellenben valamennyi z-nek előjelet tulajdonítva úgy, hogy e egyik oldalán levő középpontokra $z > 0$, a másikon levőkre pedig $z < 0$ legyen, (1) érvényes marad. Így ugyanis a z-knek koordináta jellegük lesz, és a felhasznált $(z_{12} - z_1) : (z_2 - z_1)$ arányra kapott összefüggés érvényes marad, mert a két különbség egyenlő előjelű, hiszen K_{12} mindig K_1 és K_2 közé esik. Könnyű belátni végül, hogy előjeles z értékekkel (1) a téglalapot metsző és valamelyik oldalával párhuzamos e esetén is érvényes.

Horváth Tibor (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Számos megoldás koordináta–geometriai, több más mechanikai meggondolással, egy pedig térmértani segédtétel alapján bizonyította az állítást.