a) Az egyenletrendszer megoldása: Az

$$x=\frac{x(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{x^2}{x+y+z}+a$$

összefüggés alapján elegendő a jobb oldali első tagot kifejeznünk a, b, c segítségével. Az adott egyenletekből viszont az

$$r=\frac{yz}{x+y+z},\qquad s=\frac{zx}{x+y+z},\qquad t=\frac{xy}{x+y+z}$$

kifejezése remélhető, mert egyenleteink így írhatók:

$$(1')\qquad s+t=a,$$
$$(2')\qquad t+r=b,$$
$$(3')\qquad r+s=c.$$

Innen

$$2(r+s+t)=a+b+c,$$

tehát

$$(4)\qquad r=(r+s+t)-(s+t)=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c),$$

és hasonlóan

$$(5)\qquad s=\frac{1}{2}(a-b+c),$$
$$(6)\qquad t=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

A keresett kifejezésés r, s, t közt mostmár az

$$st=\frac{x^2yz}{(x+y+z)^2}=\frac{x^2}{x+y+z}\cdot r$$

összefüggés áll fenn. Ebből

$$\frac{x^2}{x+y+z}=\frac{st}{r}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)},$$

s így

$$(7)\qquad x=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)}+a=\frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(-a+b+c)}.$$

Hasonlóan – pl. $y/x=r/s$, $z/x=r/t$ felhasználásával

$$(8)\qquad y=\frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(a-b+c)},$$
$$(9)\qquad z=\frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(a+b-c)}.$$

Hallgatólag feltettük mindenek előtt, hogy az (1)–(3) egyenleteknek értelme van, tehát $x+y+z\neq 0$; továbbá hogy az osztásokat elvégezhetjük, vagyis hogy (4), (5) és (6) egyik oldala sem 0, tehát $a+b-c$, $-a+b+c$, $c+a-b$ és x, y, z 0-tól különbözők. Most megvizsgáljuk, mi a helyzet, ha ezek között egy vagy több 0 érték lép fel.

Tegyük fel, hogy pl. $a+b-c=0$. Ekkor (6) szerint $t=xy/(x+y+z)=0$, tehát x és y közül legalább az egyik, és így r és s közül, s velük együtt $-a+b+c$ és $a-b+c$ közül is legalább az egyik 0. Legyen $-a+b+c=0$, de $a-b+c\neq 0$, így összeadással $2b=0$, $b=0$, ebből egyrészt $a-c=0$, másrészt $a+c\neq 0$, tehát $a=c\neq 0$. Másrészt $s\neq 0$, $r=t=0$, tehát $y=0$, $xz\neq 0$. Ezért (1) és (3) azonossá válnak:

$$(10)\qquad \frac{xz}{x+z}=a,$$

és ennek számtalan sok megoldása van: bármely a 0-tól különböző v számmal megoldás a következő számhármas:

$$(11)\qquad x=v,\qquad y=0,\qquad z=\frac{av}{v-a}.$$

Ha pedig $a+b-c=-a+b+c=a-b+c=0$, akkor mindhármat összeadva $a+b+c=0$, tehát $a=b=c=0$. Ebből következik, hogy bármely 0, 0, v számhármas, ahol $v\neq 0$, bármely sorrendben megoldása a rendszernek. Ugyanis pl.

(2)-ből vagy $y=0$ és $z+x\neq 0$ (mert ha még $z+x=0$ is áll, akkor $x+y+z=0$, tehát az egyenletrendszernek nincs értelme), vagy pedig $z+x=0$ és $y\neq 0$. Az első eset ismét (10)-re vezet, de $a=0$-val, tehát $xz=0$, és így $z=v\neq 0$ választással $x=0$. A második esetben pedig (1) és (3) különbségét véve $(x-z)y=0$, tehát $x-z=x+z=0$, amiből $x=z=0$, $y\neq 0$.

Tekintsük végül annak lehetőségét, hogy $x+y+z=0$ (feltéve természetesen, hogy (4), (5) és (6) jobb oldala 0-tól különböző). x, y és z közös számlálóját K-val jelölve és kiemelve (7)–(9)-ből

$$x+y+z=\frac{K}{2}\left(\frac{1}{-a+b+c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}\right).$$

A zárójelben közös nevezőre hozással a számláló

$$\begin{gathered}\left[a^2-(b-c)^2\right]+\left[b^2-(c-a)^2\right]+\left[c^2-(a-b)^2\right]=\\ =2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2=K,\end{gathered}$$

eszerint $x+y+z=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $K=0$.

Összefoglalva: ha $K=0$, akkor a rendszernek nincs értelme. Továbbá $b+c-a$, $c+a-b$ és $a+b-c$ értéke vizsgálandó.

Ha egyikük sem 0, akkor a megoldást (7), (8) és (9) adja: x, y, z egyike sem 0;

ha közülük pontosan egy 0, akkor nincs megoldás;

ha kettő 0 (ez az eset könnyebben felismerhető abból, hogy a, b, c egyike 0 és a másik kettő egyenlő, de 0-tól különböző), akkor végtelen sok megoldás van, a megoldás típusát (11) adja, x, y, z közül pontosan egynek értéke 0;

ha pedig mindhárom 0, (ez az eset könnyebben felismerhető arról, hogy $a=b=c=0$), akkor is végtelen sok megoldás van, x, y, z közül pontosan kettő 0, a harmadik pedig (és ez bármelyikük lehet) tetszés szerinti 0-tól különböző szám.

Nagy Csaba (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

b) Egész megoldások keresése. Egész x, y, z-t eredményező a, b, c, számhármasokat úgy kapunk, hogy a megválasztott x, y, z-ből (1)–(3) alapján a, b, c-t kiszámítjuk. (Nem lehet azonban $x+y+z=0$.) Bár a feladat ezt nem írja elő, ilyen tulajdonságú *egész* a, b, c számhármasokat is kaphatunk. Ugyanis az előbbiek szerint számított a, b, c nevezője, esetleges egyszerűsítés előtt, $x+y+z$. Mármost x, y, z helyére az $x'=x(x+y+z)$, $y'=y(x+y+z)$, $z'=z(x+y+z)$ számhármast véve az (1)–(3)-beli számlálók $(x+y+z)^2$-szeresei, a nevezők $(z+y+z)$-szeresei az előbbieknek, így a, b, c helyére $x+y+z$-szereseik, vagyis egész számok lépnek.

Csipka László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** A gyökök (7)–(9) kifejezései a diszkusszióra célszerűek. Kiszámításuk azonban könnyebb a következő alakokból

$$\begin{gathered}x=\frac{2bc}{b+c-a}-\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{2ca}{c+a-b}-\frac{c+a-b}{2},\\ z=\frac{2ab}{a+b-c}-\frac{a+b-c}{2}.\end{gathered}$$

Felszeghy Tamás (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. III. o. t.)

2. Egyszerűbb eljárást adhatunk K vizsgálata helyett is. Tekintsük $K=0$-t egyenletnek a-nak b és c-ből való kiszámítására.

(12) $$K=-a^2+2(b+c)a-(b-c)^2=0\text{-ból}$$

(13) $$a_1=b+c+2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2,\quad a_2=b+c-2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,$$

tehát a gyöktényezős alak alapján, majd $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$-nel a négyzetek különbségét szorzattá alakítva

$$K=-\left[a-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\right]\left[a-\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\right]=$$

(14) $$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right).$$

Itt egyelőre feltettük, hogy a, b, c egyike sem negatív. De (13) első kifejezései akkor is valós számok, ha b, c negatív, és ekkor a_1, a_2 is negatív, eszerint (14)-ben a, b, c helyett abszolút értékük veendő. Könnyű belátni máshogy is, hogy ha a, b, c között vannak ellentett jelűek akkor $K\neq 0$. Valóban, ekkor a, b, c közül vagy pontosan egy, vagy pontosan kettő negatív, és elég a következő eseteket tekinteni:

$$\text{I.}\quad a<0;\ b,\ c>0\qquad \text{II.}\quad a>0;\ b,\ c<0\ (b\text{ és }c\text{ egyike 0 is lehet}).$$

Egyik esetben sincs (12) bal oldalán pozitív tag, de negatív van, tehát $K<0$.

Azt nyertük, hogy K-t elég akkor vizsgálni, ha a, b, c között nincs két ellentett jelű szám. És (14) szerint K akkor és csak akkor 0, ha a, b, c abszolút értékeinek pozitív négyzetgyökei közül valamelyik egyenlő a másik kettő összegével. (Pl. $a=1$, $b=4$, $c=9$ esetén $K=0$.)