Bevezetve a következő jelöléseket:

$$a+b+c=S_1,\quad a^2+b^2+c^2=S_2,\quad a^3+b^3+c^3=S_3,\quad a^4+b^4+c^4=S_4,$$
$$d+e+f=T_1,\quad d^2+e^2+f^2=T_2,\quad d^3+e^3+f^3=T_3,\quad d^4+e^4+f^4=T_4,$$

a feltevések így írhatók:

$$T_1-S_1=0, \tag{3}$$
$$T_2-S_2=0, \tag{4}$$
$$T_3-S_3\neq 0. \tag{5}$$

Vizsgáljuk a (2) bal és jobb oldalán álló K_1, K_2 kifejezések különbségét rendre $m=1,\ 2,\ 3,\ 4$ esetén. $m=1$-re (2) nyilvánvalóan azonosság. $m=2$-re

$$K_1-K_2=(S_2+T_2+3k^2)+2T_1k-(T_2+S_2+3k^2)-2S_1k=2(T_1-S_1)k=0,$$

mert k együtthatója (3) szerint 0. $m=3$-ra

$$K_1-K_2=(S_3+T_3+3k^3)+3T_2k+3T_1k^2-(T_3+S_3+3k^3)-3S_2k-3S_1k^2=$$
$$=3(T_2-S_2)k+3(T_1-S_1)k^2=0,$$

mert k és k^2 együtthatója (4) és (3) szerint 0. Végül $m=4$-re az $(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$ azonosság felhasználásával

$$K_1-K_2=(S_4+T_4+3k^4)+4T_3k+6T_2k^2+4T_1k^3-(T_4+S_4+3k^4)-$$
$$-4S_3k-6S_2k^2-4S_1k^3=4(T_3-S_3)k+6(T_2-S_2)k^2+$$
$$+4(T_1-S_1)k^3=4(T_3-S_3)k,$$

mert k^2 és k^3 együtthatója 0. Minthogy pedig k együtthatója (5) szerint 0-tól különböző, azért $K_1-K_2\neq 0$, vagyis a (2) összefüggés $m=4$-re nem áll fenn bármely k-val (hanem csupán $k=0$-val). Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szabó Anna (Szeged, Tömörkény I. lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Több dolgozat szerint az állítás „bármely k-val” szavai így helyesbítendők: „bármely $k\neq 0$-val”. Valóban láttuk, hogy *van olyan* k, amellyel (2) fennáll $m=4$ mellett is, éspedig $k=0$ az egyetlen ilyen érték. Ez az eset azonban nem változtatja meg azt a tényt, hogy $m=4$ mellett (2) nem áll fenn *bármely* k-val, – tehát az eredeti fogalmazás nem helytelen. Ez persze nem jelenti azt, hogy az észrevétel volna helytelen. Az állítás az említett módosítással is helyes. Ezt a meglepő tényt az magyarázza, hogy az állítás és a módosítás hasonlóságuk ellenére nem egészen ugyanarról beszélnek. – Akkor is érvényes volna az eredeti állítás, ha ezer kivételes k-érték volna, vagy ha pl. $m=4$ mellett *minden egész* számra fennállna (2) – már pedig *végtelen sok* egész szám van, – ugyanis ez még *nem bármely* szám, hiszen vannak nem egész számok is. – Akkor lenne szükség a fenti helyesbítésre, ha az állítás így szólna: a (2) állítás $m=4$ mellett bármely k-val érvénytelen.

2. 24 dolgozat általánosítani vélte az állítást a következőképpen: „ha (1) fennáll $n=1,\ 2,\ \ldots,\ p$-vel, de nem áll fenn $n=p+1$-gyel, akkor (2) fennáll bármely k-val $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1$ mellett, de nem áll fenn $m=p+2$ mellett.” Ez az állítás azonban semmitmondó, mert – amint arra *Kéry Gerzson* (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.) rámutat – bebizonyítható, hogy ha (1) fennáll $n=1,\ 2,\ 3$-mal, akkor az a, b, c számok valamilyen sorrendben azonosak a d, e, f számokkal, ezért (1) valamennyi $n>3$ természetes számra is fennáll. Így a feltétel nem teljesülhet. Abban az esetben azonban elfogadható általánosítást adhatunk, ha m és n értékeinek számával együtt növeljük a két egyenlőség tagjainak számát is. A következő általánosítás tehát már helyes: Ha p természetes szám, és az

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_{p+1}^n=b_1^n+b_2^2+\ldots+b_{p+1}^n$$

egyenlőség fennáll $n=1,\ 2,\ \ldots\ p$-vel, de nem áll fenn $n=p+1$-gyel, akkor az

$$a_1^m+a_2^m+\ldots+a_{p+1}^m+(b_1+k)^m+(b_2+k)^m+\ldots+(b_{p+1}+k)^m=$$
$$=b_1^m+b_2^m+\ldots+b_{p+1}^m+(a_1+k)^m+(a_2+k)^m+\ldots+(a_{p+1}+k)^m$$

egyenlőség $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1$-re fennáll bármely k-val, de $m=p+2$-re már nem. Bizonyítása ugyanúgy történik, mint a $p=2$ speciális esetben. – *Kéry Gerzson* az általánosítást a binomiális tétel felhasználásával be is bizonyította. – Helyesen mondta ki az általánosítást *Ratkó István* is (Budapest, Arany J. g. IV. o. t.), de nem indokolta meg a tagok száma emelésének szükségességét.

További 6 dolgozat tett lépést a fenti irányban: (1) két oldali tagjainak számát 3, ill. $p+1$ helyett j-nek véve, de a j és p közti kapcsolatot nem tisztázta. Ezek az előbbi 24-nél erősebb általánosítást kívántak adni, de az $j<p+1$-re nem igaz.