I. megoldás. Legyen a kúp alapsugara R, magassága m, a gömb sugara r. Így a kúp alkotója $\sqrt{R^2+m^2}$, a henger sugara r, magassága $2r$. A kúp tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, és a gömbből így kimetszett főkör a háromszög beírt köre, tehát a szokásos jelölésekkel

$$r=\frac{t}{s}=\frac{Rm}{R+\sqrt{R^2+m^2}},\ \text{innen}\ r\sqrt{R^2+m^2}=R(m-r)\ \text{és}\ R^2=\frac{r^2m}{m-2r}.$$

Így a kérdéses térfogatok k aránya:

$$\underline{k}=V_1:V_2=\frac{\pi}{3}R^2m:2\pi r^3=\frac{r^2m^2}{3(m-2r)}:2r^3=\underline{\frac{m^2}{6mr-12r^2}}.$$

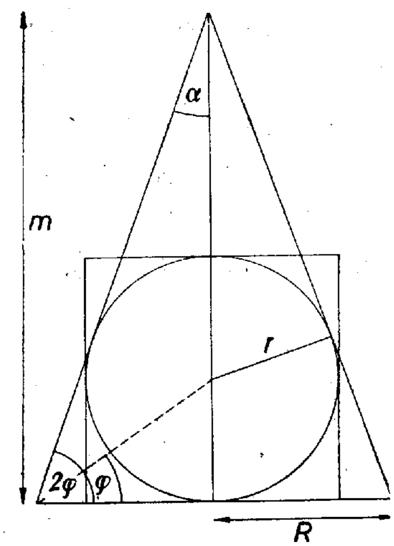
Az aláhúzott részt r-re vonatkozó egyenletnek tekintve és megoldva:

$$12kr^2-6kmr+m^2=0,\qquad r=\frac{m}{12k}\left[3k\pm\sqrt{3k(3k-4)}\right]. \tag{1}$$

Mivel k nyilván pozitív, azért valós megoldás csak $3k-4\ge 0$, azaz $k\ge 4/3$ esetén van. Tehát $k=1$ lehetetlen, $V_1\ne V_2$. Ezt kellett bizonyítanunk.

A $k_{\min}=4/3$ esetben (1)-ből $r=m/4$, tehát a kúp csúcsának a gömb középpontjától való távolsága $m-r=3r$. A kívánt szöget úgy kapjuk, hogy egy tetszés szerinti r sugarú körhöz egy a középponttól $3r$-nyire levő pontból meghúzzuk az érintőket és szögüket megfelezzük.

Békési Gábor (Ócsa, Bolyai J. g. IV. o. t.)



II. megoldás. Legyen az alkotók hajlásszöge az alaphoz 2φ. Ekkor $m=R\operatorname{tg}2\varphi$, $r=R\operatorname{tg}\varphi$, és így

$$k=\frac{\pi}{3}R^3\operatorname{tg}2\varphi:2\pi R^3\operatorname{tg}^3\varphi=\frac{\operatorname{tg}2\varphi}{6\operatorname{tg}^3\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{6(1-\operatorname{tg}^2\varphi)\operatorname{tg}^3\varphi}=\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}.$$

k-ra akkor kapunk legkisebb értéket, ha itt a nevezőbeli $\operatorname{tg}^2\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)$ szorzat a legnagyobb. Mivel $2\varphi<90^\circ$, $\varphi<45^\circ$, azért a második tényező is pozitív. A tényezők összege állandó: 1, tehát a pozitív számok számtani és mértani közepének nagyságviszonyára ismert tétel szerint a szorzat a tényezők egyenlősége esetén a legnagyobb. $\operatorname{tg}^2\varphi=1-\operatorname{tg}^2\varphi$-ből $\operatorname{tg}\varphi=1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}2\varphi=4/\sqrt{2}$, innen a keresett α félnyílásszögre $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{1/8}$, $\sin\alpha=1/3$, α bármelyikből egyszerűen szerkeszthető.

Goldperger Katalin (Balassagyarmat, II. sz. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A gömböt (és vele a hengert is) állandónak véve legyen $r=1$, ekkor $\operatorname{tg}\varphi=1/R$, $m=R\operatorname{tg}2\varphi=2R^2/(R^2-1)$, és így

$$V_1=\frac{2\pi R^4}{3(R^2-1)},\ \text{amiből}\ R^2=\frac{1}{4\pi}\left[3V_1\pm\sqrt{3V_1(3V_1-8\pi)}\right],$$

tehát $V_1\ge 8\pi/3$, $V_{\min}=8\pi/3$. Másrészt $V_2=2\pi$, tehát $k_{\min}=\dfrac{4}{3}$.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

2. A gömb térfogata $V=2V_2/3$, azért a $V_1/V=3k/2$ arány legkisebb értéke 2. Eszerint a kúpba írt gömb térfogata legfeljebb fele lehet a kúp térfogatának. A fenti szerkesztéssel éppen a maximumot adó félnyílásszöget adtuk meg.