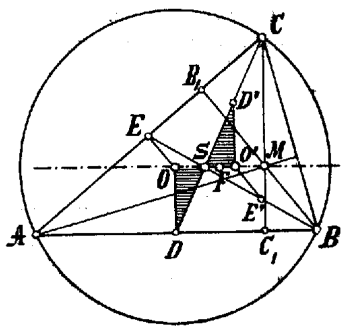
Minden háromszögben a magassági pont M, a tömegközéppont S és a háromszög köré írható kör középpontja O egy egyenesen – az Euler-féle egyenesen – fekszik, még pedig úgy, hogy a magassági pontnak a tömegközépponttól való távolsága kétszer annyi, mint ez utóbbinak a háromszög köré írható kör középpontjától való távolsága; azaz $SM = 2SO$.

Bizonyítás. Rajzoljuk meg az ABC háromszögben a CC_1 és BB_1 magasságokat, melyek egymást M-ben metszik, továbbá a CD és BE középvonalakat, melyeknek metszéspontja a háromszög tömegközéppontja. MS-nek a meghosszabbítására mérjük rá MS-nek a felét, úgy, hogy $OS = \frac{1}{2}MS$.



Hogy tételünket bebizonyíthassuk, kimutatjuk, hogy az O pontot az AC és AB oldalak középpontjaival összekötő OE és OD egyenesek a háromszög megfelelő oldalaira merőlegesek, miből következik, hogy O a háromszög köré írható kör középpontja, mert e pontban metszik egymást az oldalak középpontjaiban emelt merőlegesek. Forgassuk a DOS és EOS háromszögeket 180°-kal S körül, úgy, hogy O pont O'-be, D pont D'-be és E pont E'-be jut. Minthogy $SO' = \frac{1}{2}SM$, $SD' = \frac{1}{2}SC$, $SE' = \frac{1}{2}SB$, azért $SD'O'\triangle \sim SVM\triangle$ és $SO'E'\triangle \sim SMB\triangle$ s így $D'O' \parallel CM$ és $E'O' \parallel BM$. De $D'O' \parallel OD$, $E'O' \parallel EO$ s így $OD \perp AB$ és $OE \perp AC$.

Jegyzet. A *Feuerbach*-féle kör középpontja (F) ugyancsak az Euler-féle egyenesen fekszik, még pedig egyenlő távolságban a magassági ponttól és a háromszög köré írható kör középpontjától. Így tehát

$$MF : SO : FS = 3 : 2 : 1.$$

(K.M.L.V.22. lap).

Tételünket felhasználva, könnyen oldhatjuk meg a következő feladatot: (Ld. 585 feladat.)