1. *Pascal*[1] tétele a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozik, de mi arra az esetre szorítkozunk, mikor a kúpszelet két egyenesből áll. Ekkor a tétel így szól:

Legyen adva egy sík két e és e' egyenesén három-három pont

$$A,\ B,\ C \text{ ill. } A',\ B',\ C',$$

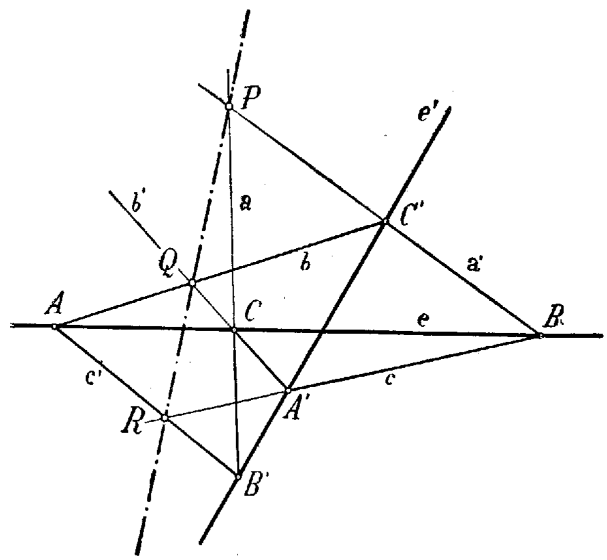
de úgy, hogy egyikök sem essék a két egyenes metszéspontjába. Ekkor az $AB'CA'BC'$ hatszögnek egymással átellenes

$$a = B'C \text{ és } a' = BC'$$

$$b' = CA' \text{ és } b = C'A$$

$$c = A'B \text{ és } c' = AB'$$

oldalainak P, Q és R metszéspontjai egy egyenesen vannak. (1. ábra.)

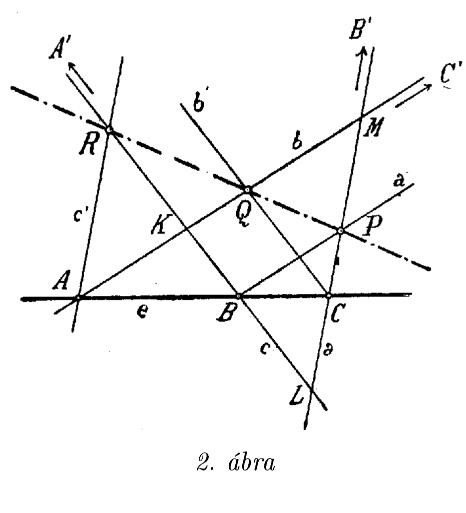


1. ábra

2. Hogy a tétel az adott pontok bármely helyzetére alkalmazható legyen, két párhuzamos egyenesnek is tulajdonítunk közös pontot. Ezt a pontot e két egyenes *végtelen pontjának* mondjuk. Továbbá a sík végtelen pontjainak geometriai helyét egyenesnek tekintjük.

Ezt az egyenest az illető sík és minden vele párhuzamos sík *végtelen egyenesének* mondjuk. A tér összes végtelen pontjainak geometriai helyét síknak tekintjük, és ezt a *végtelen síknak* mondjuk.

3. Bizonyítsuk be *Pascal* tételét először arra az esetre, midőn e' a síknak végtelen egyenese. (2. ábra.)



2. ábra

Ekkor A', B' és C' a végtelenben vannak és úgy adandók meg, hogy (nyilakkal) kijelöljük, mily irányú egyeneseken vannak a végtelenben. Az a, b, c egyeneseket úgy rajzoljuk meg, hogy e-nek adott C, A, B pontjain keresztül a

[1] *Blaise Pascal* franczia mathematikus és philosphus szül. Clermontban 1623. jun. 19., megh. Párisban 1662 aug. 19.

kijelölt irányokban vonjuk meg. Az a', b', c' egyeneseket pedig úgy kapjuk meg, hogy B, C ill. A-n keresztül b, c ill. a-val párhuzamosokat húzunk.

Ha az a, b és c egyenesek által meghatározott háromszög csúcsait K, L és M-mel jelöljük, akkor *Menelaos* tétele (K.M.Lapok IV. évf. 148. l.) szerint

$$\frac{CL}{CM} \cdot \frac{AM}{AK} \cdot \frac{BK}{BL} = 1.$$

Ámde b' és c, c' és a, végre a' és b párhuzamossága miatt

$$CL : CM = QK : QM$$

$$AM : AK = RL : RK$$

$$BK : BL = PM : PL.$$

Ennélfogva

$$\frac{RL}{RK} \cdot \frac{QK}{QM} \cdot \frac{PM}{PL} = 1,$$

tehát *Menelaos* tételének megfordítása szerint P, Q és R valóban egy egyenesen vannak.

4. Legyen most e és e' a síknak két véges egyenese. Ezt az esetet vetíttéssel, még pedig ú. n. *czentrális projekczióval*, visszavezetjük az előbbire.

E végből vegyünk fel a síkon kívül, melyben a vizsgálandó ábra van, egy másik síkot, a *képsíkot*, továbbá a térben egy S pontot, a *czentrumot* (az utóbbit úgy, hogy sem a vetítendő ábrának síkjába, se a képsíkba ne essék). A vetítendő ábra egy tetszőleges pontjának, pl. A-nak *vetületét* vagy *képét* úgy kapjuk, hogy e pontot egyenes vonallal összekötjük a *czentrummal*, és az így nyert AS vetítő sugárnak meghatározzuk a képsíkkal való metszéspontját. Egy vonal vetületét vagy képét az egyes pontok vetületeinek geometriai helye adja. E szerint az egyenes vonalnak képe megint egyenes, t. i. a vetítendő egyenesen és S-en keresztül fektetett síknak a képsíkkal való metszésvonala.

A vetített sík három pontja akkor és csak akkor van egy egyenesben, ha képeik egy egyenesben vannak.

Mi a képsíkot úgy fogjuk választani, hogy párhuzamos legyen az S czentrumon és a vetítendő ábra e' egyenesén keresztül fektetett síkkal. Ekkor e' vetülete a képsíknak *végtelen egyenese.*

$AB'CA'BC'$ hatszög vetülete tehát oly hatszög, a milyent 3. alatt vizsgáltunk, és az ott mondottaknál fogva P, Q és R képei egy egyenesbe esnek. De ez csak úgy lehetséges, hogy P, Q és R maguk is egy egyenesben vannak.