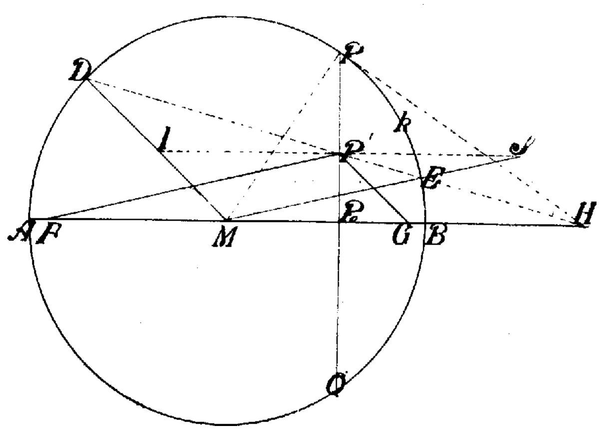
A következőkben két különböző bizonyítást mutatunk be arról a tételről, hogy a kör derékszögű projekciója egy síkra ellipsis.

*I. bizonyítás.*

Kiindulunk abból a tételből, hogy egy pont polárisa egy körre vonatkozólag, a ponton keresztül fektetett szelőnek a körben fekvő részét ugyanolyan viszony szerint osztja, mint maga a pont az egész szelőt, azaz ha (1. ábra) a $H$ pontnak $PQ$ polárisa a $k$ körre vonatkozólag a $H$ ponton keresztül menő szelőt a $P'$ pontban metszi, és a $HP'$ szelőnek metszőpontjai a $k$ körrel $D,\ E$, akkor

$$DP' : P'E = DH : EH. \tag{1}$$




*1. ábra*

Jelöljük a $k$ körnek sugarát $a$-val, középpontját $M$-mel; az $MH$ egyenes metszőpontjait a $k$ körrel $A,\ B$-vel; az $MD,\ ME$ körsugarak metszőpontjait a $P'$ ponton keresztül menő és az $AB$ átmérővel párhuzamos egyenessel $I,\ J$-vel, végre az $AB,\ PQ$ egyenesek metszőpontját $P_0$-sal.

Minthogy $P'DI \sim HDM,\ P'EJ \sim HEM$, azért

$$P'I : DP' = HM : DH \tag{2}$$

$$P'E : JP' = HE : HM \tag{3}$$

$$P'I : DI = HM : DM \tag{4}$$

$$JE : JP' = ME : MH. \tag{5}$$

Az (1), (2) és (3) aránypárok szorzatából következik

$$P'I = JP',$$

ebből és a (4) és (5) aránypárok szorzatából következik

$$JE = DI.$$

Ezen eredményeket tekintve

$$IM + JM = DM - DI + EM + JE = DM + EM = 2a;$$

ha a $P'$ ponton keresztül menő és az $MI,\ MJ$-vel párhuzamos egyenesek az $AB$ átmérőt a $G,\ F$ pontokban metszik, úgy hogy

$$GP' = MI,\ P'F = JM,\ PI' = GM,\ JP' = MF,$$

akkor

$$GP' + P'F = 2a. \tag{6}$$

Ha a (2) és (3) aránypárt ekkép felírva

$$P'I : DP' = HM : DH$$

$$JP' : P'E = HM : HE$$

tagonként egymással szorozzuk a következő

(7) $$P'I \cdot JP' : DP' \cdot P'E = \overline{HM}^2 : DH \cdot HE$$

aránypárt nyerjük.

És mert

$$DP' \cdot P'E = PP' \cdot P'Q = (PP_0 - P'P_0)(PP_0 + P'P_0) = \overline{PP_0}^2 - \overline{P'P_0}^2$$

$$DH \cdot HE = \overline{PH}^2,\ P'I = JP'$$

$$HM : PH = MP : PP_0,$$

azért (7)-ből származik

$$\overline{P'I}^2 : \overline{PP_0}^2 - \overline{P'P_0}^2 = \overline{MP}^2 : \overline{PP_0}^2$$

vagy

$$\overline{MF}^2 = \overline{P'I}^2 = \overline{MP}^2 \left[1 - \left(\frac{P'P_0}{PP_0}\right)^2\right].$$

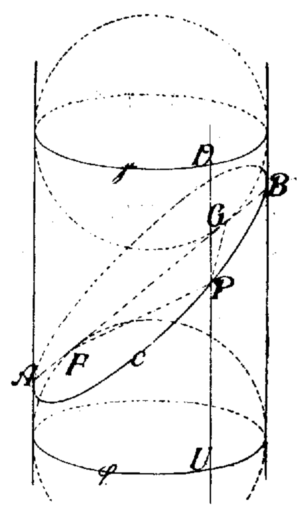
A nyert eredményből látható, hogy az $F$, $G$ pontok helyzete az $AB$ átmérőn csak a kör sugarától és azon viszonytól függ, mely szerint a $P'$ pont a $PP_0$ vonaldarabot osztja, azaz: ha a $k$ kör pontjaiból az $AB$ átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztjuk, akkor az osztópontoknak az $F, G$ pontoktól mért távolságai, (6) folytán, a kör átmérőjével egyenlő összeget adnak. Az osztópontok tehát oly ellipsisen feküsznek, melynek gyújtópontjai $F$, $G$ és főtengelye $AB$.

Ha ezután a $k$ kört az $AB$ tengely körül tetszőleges szög alatt forgatjuk, a forgatott kör pontjait az eredeti síkra derékszög alatt vetítjük, akkor a nyert projekciók az eredeti $k$ kör pontjaiból az $AB$ átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztják és ezért a forgatott kör pontjainak projekciói egy ellipsisen feküsznek.

*II. bizonyítás.*

Kiindulunk abból az ismert tételből, hogy egy forgáshenger síkmetszése ellipsis. Ennek bizonyítása a következő:

Egy forgáshengerbe (2. ábra) $F$ gömböt írunk be, mely a hengert $\varphi$ kör szerint és a metszősíkot $F$ pontban érinti, azonkívül egy $G$ gömböt, mely a hengert $\gamma$ kör szerint, a metszősíkot $G$ pontban érinti.



*2. ábra*

Ha $P$ a metszősík és a henger $c$ metszővonalának egy tetszés szerinti pontja, akkor $P$ egy hengeralkotón fekszik, mely a $\varphi$ kört $U$ pontban, a $\gamma$ kört $V$ pontban metszi.

Minthogy egy pontból egy gömbhöz húzható érintők egyenlők, azért:

$$PF = PU,\ PG = PV$$

és

$$PF + PG = PU + PV.$$

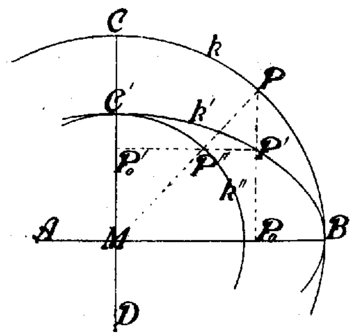
Az $UV$ vonaldarab azonban a $P$ ponttól független és egyenlő a $\varphi$ és $\gamma$ körök párhuzamos síkjainak távolságával, tehát a metszősík és a henger metszésgörbéje minden pontjának az $F$, $G$ pontoktól mért távolságai állandó összeget adnak s mint ilyenek oly ellipszisen feküsznek, melynek gyújtópontjai az $F$, $G$ pontok.

E segédtételt (mely *Dandelin*-től származik 1822-ből) így fejezhetjük ki:

*Oly síkgörbe, melynek derékszögű projekcziója egy síkra kör, szükségképp ellipsis.*

Ha kimutatható, hogy $k$ kör derékszögű projekcziója $k'$ egy síkra oly görbe, melynek derékszögű projekcziója bizonyos síkra egy $k''$ kör, akkor a segédtétel alapján $k'$-nek ellipsisnek kell lennie.

E végből jelöljük (3. ábra) $k$ kör sugarát $a$-val, középpontját $M$-mel, egy tetszés szerinti vonaldarabot $b$-vel.




*3. ábra*

Bocsássunk a $k$ kör $P$ pontjából az $AB$ átmérőre $PP_0$ merőlegest és vegyünk fel ezen egy $P'$ pontot akképpen, hogy $PP_0 : P'P_0 = a : b$. Bocsássunk a $P'$ pontból az $AB$-re merőleges $CD$ átmérőre egy $P'P_0'$ merőlegest és határozzuk meg ezen a $P''$ pontot akképpen, hogy

$$P'P_0' : P''P_0' = PP_0 : P'P_0' = a : b.$$

E proporczióból következik (mert $P_0'M$ párhuzamos és egyenlő $P'P_0$, továbbá $P'P_0'$ párhuzamos és egyenlő $P_0M$):

$$P_0'M : P''P_0' = PP_0 : P_0'M = a : b,$$

ebből az $MPP_0$, $P''MP_0'$ derékszögű háromszögek hasonlósága, tehát még

$$MP : MP'' = a : b,$$

végre

$$MP'' = b.$$

Ez eredményt ekképp fejezhetjük ki: ha $AB$, $CD$ a $k$ körnek két egymásra merőleges átmérője, és a $k$ pontjaiból az $AB$-re bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztjuk, akkor az osztópontok egy $k'$ görbén feküsznek; ha a $k'$ pontjaiból a $CD$-re bocsátott merőlegeseket az előbbi állandó viszony szerint osztjuk, akkor az új osztópontok egy $k''$ körön feküsznek.

Forgassuk ezek után a $k$ kört az $AB$ átmérő körül egy tetszés szerinti $\varphi$ szöggel és projicziáljuk a forgatott $k$-t az eredeti síkra. A projekcziónak, $k'$-nek, pontja az eredeti $k$ körnek pontjaiból az $AB$ átmérőre bocsátott merőlegeseket állandó viszony szerint osztják. Ha a $k'$ görbét az $AB$-re merőleges körátmérő körül szintén $\varphi$ szög alatt forgatjuk és a forgatott görbét az eredeti síkra projicziáljuk, akkor a projekcziónak, $k''$-nek, pontjai a $k'$ pontjaiból a $CD$-re bocsátott merőlegeseket szintén ugyanazon és az előbbivel egyenlő viszony szerint osztják. S mert a $k''$ görbe az előbbiek szerint kör, azért a $k'$ görbének, a segédtétel folytán, ellipsisnek kell lennie. A $k$ kör derékszögű projekcziója $k'$, tehát ellipsis.

E bizonyításból következik még: „ha az $A$ és a $B$ sík a $C$ síkhoz egyenlő szög alatt hajlik, a mellett az $AC$, $BC$ síkok metszővonalai egymásra merőlegesek, és az $A$ síkban fekvő kört a $C$ síkra derékszög alatt projicziáljuk, akkor e projekcziónak derékszögű projekciója a $B$ síkra szintén kör".