Az eddigiekben az ax^2+b alakú binomnak négyzetté való átalakításánál x-nek rationalis értékeit vettük figyelembe. Számtalan esetben x-nek egész számú értékei is léteznek, a melyekre nézve a kifejezés teljes négyzetté alakul.

Legyen

$$ax^2 + b = y^2,$$

hol a, b, x és y mindannyian egész számokat jelentsenek. Tegyük föl, hogy egy egész számokban való megoldás már ismeretes. Ugyanis, ha ilyent nem ismernénk, akkor a feladat megoldása esetleg lehetetlen volna. Mondjuk, hogy $x = f$ esetében:

$$af^2 + b = g^2,$$

kérdés: hogyan kapjuk ezen megoldásból a többieket?

Két egyenlőségünkből

$$ax^2 - af^2 = y^2 - g^2$$

származik.

$$a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$$

$$apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$$

Legyen:

$$ap(x+f) = q(y+g)$$

$$q(x-f) = p(y-g)$$

s határozzuk meg ismét az x, y ismeretleneket.

$$x = \frac{2gpq}{ap^2-q^2} - \frac{(ap^2+q^2)f}{ap^2-q^2}$$

$$y = \frac{g(ap^2+q^2) - 2afpq}{ap^2-q^2}.$$

Látszólag messzire eltávoztunk eredeti czélunktól; mert hiszen x és y egész számok legyenek, s itt igen complicált törtek alakjában mutatkoznak.

Legyen

$$\frac{ap^2+q^2}{ap^2-q^2} = m$$

$$\frac{2pq}{ap^2-q^2} = n$$

s ekkor

$$x = ng - mf$$

$$y = mg - naf.$$

Az m, n számok azonban nem tetszésszerintiek; mert föltételeknek vannak alávetve.

$$m^2 = \frac{a^2p^4 + 2ap^2q^2 + q^4}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4}$$

$$n^2 = \frac{4p^2q^2}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4},$$

honnét

$$m^2 - an^2 = \frac{a^2p^4 + 2ap^2q^2 + q^4 - 4ap^2q^2}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4} = 1$$

Azon föltétel, melynek m és n eleget tegyenek, a következő:

$$m^2 = an^2 + 1.$$

Minthogy a adott szám, tehát első gondunk legyen n-re nézve oly értéket találni, a mely mellett an^2+1 teljes négyzet. Ha ez megvan, és találtunk oly f számot, melyre nézve af^2+b szintén teljes négyzet, akkor a feladatot megoldottuk.

Ezzel feladatunk vissza van vezetve arra, miként alakítható teljes négyzetté az an^2+1 kifejezés?

Ha törtszámokat is elfogadunk, akkor a megoldás igen egyszerű; mert

$$m^2 = \left(1 + \frac{np}{q}\right)^2 = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{n^2p^2}{q^2} = an^2 + 1$$

$$\frac{2np}{q} + \frac{n^2p^2}{q^2} = an^2$$

$$2pq + np^2 = anq^2$$
$$n = \frac{2pq}{aq^2 - p^2},$$
honnét n számára végtelen sok értéket találunk. De n-nek egész számnak kell lennie, s így ezen eljárásunk általában nem alkalmazható.

A megoldás a-nak nem minden értékére nézve sikerül. Ugyanis a nem lehet negatív szám, sem teljes négyzet. A többi esetekben mindig találunk n-re nézve olyan egész számú értékeket, hogy $an^2 + 1$ teljes négyzet legyen.

Minden numericus egyenlet esetében alkalmazható *Pell* módszere, melyet a következő egyszerű példákon tanulmányozhatunk.

$2n^2 + 1$ teljes négyzetté alakítandó. A kifejezés négyzetgyöke n és $2n$ közt fekszik, tehát mondhatjuk, hogy
$$\sqrt{2n^2 + 1} = n + p,$$
a hol $p < n$.
$$2n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$$
$$n^2 = 2np + p^2 - 1$$
$$n = p + \sqrt{2p^2 - 1}.$$
A megoldás attól függ, vajjon $2p^2 - 1$ lehet-e teljes négyzet? Ez $p = 1$ esetében bekövetkezvén, mint megoldás: $n = 2$ adódik ki. $3n^2 + 1$ teljes négyzetté alakítandó.
$$\sqrt{3n^2 + 1} = n + p$$
$$n = \frac{p + \sqrt{3p^2 - 2}}{2}.$$
Minthogy $\sqrt{3p^2 - 2} > p$, tehát $n > \frac{2p}{2}$, azt mondhatjuk, hogy
$$n = p + q$$
legyen. Ekkor
$$2p + 2q = p + \sqrt{3p^2 - 2}$$
$$p + 2q = \sqrt{3p^2 - 2}$$
$$p^2 + 4pq + 4q^2 = 3p^2 - 2$$
$$2p^2 = 4pq + 4q^2 + 2$$
$$p^2 = 2pq + 2q^2 + 1$$
$$p = q + \sqrt{3q^2 + 1}.$$
A gyökzendő egyenlő az adott kifejezéssel, és $q = 0$ esetében teljes négyzet; de ekkor $p = 1$ és $n = 1$.

$5n^2 + 1$ teljes négyzetté alakítandó.

Most $\sqrt{5n^2 + 1} > 2n$, ennélfogva
$$\sqrt{5n^2 + 1} = 2n + p$$
$$n = 2p + \sqrt{5p^2 - 1}.$$
Minthogy $\sqrt{5p^2 - 1} > 2p$, tehát $n > 4p$ és $n = 4p + q$ tehető.
$$4p + q = 2p + \sqrt{5p^2 - 1}$$
$$2p + q = \sqrt{5p^2 - 1}$$
$$4p^2 + 4p + q^2 = 5p^2 - 1$$
$$p = 2q + \sqrt{q^2 + 1},$$
a minek $q = 0$ felel meg, tehát $p = 1$, s így $n = 4$.

Az eddigi példákban meglehetősen gyorsan eredményhez jutottunk. Lássunk tehát oly példát, mely kissé hosszadalmasabb.

$13n^2 + 1$ teljes négyzetté alakítandó.
$$13n^2 + 1 = m^2$$
$$m^2 > 9n^2 \text{ és } m > 3n$$

$$m = 3n + p$$
$$13n^2 + 1 = (3n + p)^2$$
$$n = \frac{3p + \sqrt{13p^2 - 4}}{4}$$

s így $n > \dfrac{6p}{4}$ vagyis $> p$.

$$n = p + q$$
$$p + 4q = \sqrt{13p^2 - 4}$$
$$p = \frac{q + \sqrt{13q^2 + 3}}{3}.$$

Most $p > \dfrac{q + 3q}{3}$, vagyis $> q$.

$$p = q + r$$
$$2q + 3r = \sqrt{13p^2 + 3}$$
$$q = \frac{2r + \sqrt{13r^2 - 3}}{3.}$$

Most $q > \dfrac{2r + 3r}{3}$ vagyis $> r$.

$$q = r + s$$
$$r + 3s = \sqrt{13r^2 - 3}$$
$$r = \frac{s + \sqrt{13s^2 + 4}}{4.}$$

Most $r > \dfrac{s + 3s}{3}$, vagyis $> s$.

$$r = s + t$$
$$3s + 4t = \sqrt{13s^2 + 4}$$
$$s = 3t + \sqrt{13t^2 - 1}.$$

Most $s > 3t + 3t$, vagyis $6t$.

$$s = 6t + u$$
$$3t + u = \sqrt{13t^2 - 1}$$
$$t = \frac{3u + \sqrt{13u^2 + 4}}{4}.$$

Most $t > \dfrac{6u}{4}$, vagyis $u >$.

$$t = u + v$$
$$u + 4v = \sqrt{13t^2 + 4}$$
$$u = \frac{v + \sqrt{13v^2 - 3}}{3}.$$

Most $u > \dfrac{4v}{3}$, vagyis v.

$$u = v + x$$
$$2v + 3x = \sqrt{13v^2 - 3}$$
$$v = \frac{2x + \sqrt{13x^2 + 2}}{3}.$$

Most $v > \dfrac{5x}{3}$, vagyis $> x$.

$$v = x + y$$
$$x + 3y = \sqrt{13x^2 + 3}$$
$$x = \frac{y + \sqrt{13y^2 - 4}}{4}.$$

Most $x > y$, s így legyen $x = y + z$.

$$3y + 4z = \sqrt{13y^2 - 4}$$

$$y = 3z + \sqrt{13z^2 - 1}$$

s ezzel a számítás véget ért, mert a tárgyalandó alakkal egyenlő áll a gyökjel alatt. A visszafelé helyettesítésnél

$$z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = y + z = 1$$

$$v = x + y = 2$$

$$u = v + x = 3$$

$$t = u + v = 5$$

$$s = 6t + u = 33$$

$$r = s + t = 38$$

$$q = r + s = 71$$

$$p = q + r = 109$$

$$n = p + q = 180$$

$$m = 3n + p = 649.$$

Ennélfogva 6 után 180 az a legkisebb szám, melyre nézve $13n^2 + 1$ teljes négyzetté válik.

A most tárgyalt *Pell*-féle egyenlet általános megoldását Euler nem ismerte; de az eddigi alapon megkísérlette. Így azon esetekben, mikor m és n csak 1-gyel vagy 2-vel térnek el valamely teljes négyzettől, sikerült az általános megoldást megtalálnia. Tovább azonban nem jutott. A tárgyalt egyenlet nagy fontossággal bír a számelméletben, s itt a négyzetes alakokkal kapcsolatban általános megoldást nyer.

A könyv hátralevő fejezében Euler magasabb rendű irratoionalitások vizsgálatával foglalkozik. Ezek ismertetésébe azonban már nem bocsátkozunk. A középiskoláinkban szerzett mathematikai ismeretekkel azokat nyomon követhetjük, s igen érdekes eredményekkel fogunk megismerkedni.

Ezzel Euler algebrájának ismertetését befejezm. Reménylem, hogy sikerült képet nyújtanom arról a modorról, mellyel Euler a felmerülő feladatokat tárgyalja, és talán sikerült tanulóink figyelmét erre a nagy szellemre és algebrájára fordítanom. Ha az utóbbi elértem akkor ezzel középiskoláink ambitiósus fiatal mathematikusainak az algebra valódi kincses házát bocsátottam rendelkezésükre.
[1]

Dr. Bozóky Endre.

[1] Euler algebrája megjelent a Reclam-féle Universal-Bibliothekban (1802-1805). Ára 1,21 M.