A határozatlan analytika feladatának megállapítása után *Euler* nehány példa kiszámítása után a

$$bp = aq + n$$

lineáris egyenlet megoldását mutatja be, p és q ismeretlenek positív, egész számú értékeit véve tekintetbe. A módszer, az ú. n. *Euler-féle algorithmus*, általánosan ismeretesnek tekinthető, mert minden tankönyvünkben megtalálható. Rámutat arra is, hogy a feladat positív egész számokban megoldhatatlan, ha a és b nem levén viszonylagos törzsszámok, közös osztójuk n-nek nem tényezője.

A legközelebbi lépés a határozatlan lineáris egyenletrendszerekhez vezet, melyek az ú. n. *regula Coeci*-vel oldatnak meg. A határozatlanságot korlátozó föltételek a megelőzőkben használtakkal azonosak. Az egyenletrendszer legegyszerűbb alakja:

$$x + y + z = a$$

$$fx + gy + hz = b.$$

Legyen f a második egyenlet bal oldalának legnagyobb, h pedig legkisebb együtthatója. Az egyenlet mindig ilyen alakban írható.

$$fx + fy + fz = fa$$

$$fx + fy + fz > fx + gy + hz$$

s ennek alapján

$$fa > b.$$

Ugyanígy

$$hx + hy + hz = ha$$

$$hx + hy + hz < fx + gy + hz$$

s ennél fogva

$$ha < b.$$

Hogy az egyenletrendszernek positív egész számokban megoldása legyen, annak föltételei:

$$fa > b > ha.$$

Különben a feladat az egyik ismeretlennek kiküszöbölésével a megelőzőre vezethető vissza.

Kevésbé ismeretesek az ezek után következő fejtegetések, melyek az

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^3 + gx^2y + \ldots = 0$$

alakú egyenleteknek egész számokban való megoldásaira vonatkoznak. A folytonosan szaporodó nehézségek felé irányuló menet első megállóhelyén az

$$xy + ax + by = c$$

egyenlettel találkozunk.

$$xy + by = c - ax$$

$$y = \frac{c - ax}{x + b}$$

$$y = -a + \frac{ab + c}{x + b}.$$

Ennek alapján kell, hogy $x+b$ az ismeretes $ab+c$ számnak osztója legyen; ezen számnak minden osztója az egyenletnek megoldását adja. Még pedig: legyen

$$x + b = f \text{ i. } x = f - b.$$

$$y = -a + g = g - a$$

$(ab + c)$-nek minden fg alakú előállítása az egyenletnek két megfejtését adja; ugyanis az egyik

$$x = f - b,\ y = g - a,$$

a másik pedig onnét származik, hogy

$$x + b = g$$

tétetvén

$$x = g - b,\ y = f - a.$$

A legközelebbi, valamivel általánosabb alak:

$$mxy = ax + by + c,$$

honnét

$$y = \frac{ax+c}{mx-b}$$

$$my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}.$$

Ismét kell, hogy $mx-b$ osztója legyen a számlálónak. Ha már most

$$mc+ab = fg$$

és például

$$mx-b = f,$$

akkor

$$x = \frac{f+b}{m}$$

a tényezőkre bontás akkor ad egész számú megoldást, ha $f+b$ osztható m-mel.

A megelőző egyenletekben az egyik ismeretlen csupán lineárisan szerepel. Ha ennek az elsőnél magasabb hatványai is előfordulnak, akkor gyökmennyiségekkel kerülünk szembe. A határozatlan analytika legérdekesebb feladatai azok, melyekben az ilyen egyenletek rationális megoldásai kerestetnek.

Keressük x-nek azon értékeit, a melyekre nézve

$$\sqrt{a+bx+cx^2}$$

értéke rationális. A megfejtés sok esetben egyáltalán lehetetlen; ha lehetséges, akkor egyelőre x-nek rationális értékeire szorítkozunk.

Semmiféle nehézséggel nem jár a feladat, ha $c=0$. Mert

$$\sqrt{a+bx} = y$$

tétetvén

$$a+bx = y^2$$

$$x = \frac{y^2-a}{b}$$

és y-nak minden értéke egy-egy megoldásra vezet.

A második esetben c négyzetszámmal egyenlő, tehát

$$\sqrt{a+bx+f^2x^2}$$

rationalizálandó. Legyen

$$\sqrt{a+bx+f^2x^2} = fs + \frac{m}{n}$$

$$a+bx+f^2x^2 = f^2x^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$

$$a+bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$

$$n^2a + n^2bx = 2mnfx + m^2$$

$$x = \frac{m^2-n^2a}{n^2b-2mnf}.$$

Ha x-nek ezen értékét helyettesítjük, akkor:

$$\sqrt{a+bx+f^2x^2} = \frac{mnb-m^2f-n^2af}{n^2b-2mnf}.$$

Minthogy x-et tört alakjában állítottuk elő, legyen

$$x = \frac{p}{q},$$

a hol

$$p = m^2-n^2a$$

$$q = n^2b-2mnf.$$

Az

$$a + \frac{bp}{q} + \frac{f^2p^2}{q^2}$$

trinom teljes négyzet, és az marad, ha q^2-tel megszorozzuk, vagyis

$$aq^2 + bpq + f^2p^2$$

teljes négyzet, ha p és q helyébe a föntebbi értékek tétetnek. Az m, n számok tetszés szerintiek, s így a feladatnak végtelen sok megfejtése van.

A harmadik esetben az a együttható négyzetszám, tehát

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2}$$

a rationalizálandó kifejezés.

Legyen

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2} = f + \frac{mx}{n};$$

ismét

$$b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$$

$$n^2b + n^2cx = 2mnf + m^2x$$

$$x = \frac{2mnf - n^2b}{n^2c - m^2},$$

tehát

$$\sqrt{f^2 + bx + cx^2} = \frac{n^2cf + m^2f - mnh}{n^2c - m^2}$$

Ismét

$$x = \frac{p}{q}$$

tétetvén

$$f^2q^2 + bpq + cp^2$$

teljes négyzet, ha

$$p = 2mnf - n^2b$$

$$q = n^2c - m^2.$$

Itt azon speciális eset nevezetes, a melyben $a = 0$. Ennek fejtegetését az olvasóra bízhatom.

A vizsgált trinom teljes négyzetté alakítható még akkor is, ha

$$a + bx + cx^2 = (f + gx) \cdot (h + kx)$$

alakban állítható elő. Ennek bebizonyítása céljából legyen

$$\sqrt{(f + gx) \cdot (h + kx)} = \frac{m \cdot (f + gx)}{n}$$

$$(f + gx) \cdot (h + kx) = \frac{m^2 \cdot (f + gx)^2}{n^2}$$

$$h + kx = \frac{m^2 \cdot (f + gx)}{n^2}$$

$$hn^2 + kn^2x = fm^2 + gm^2x$$

$$x = \frac{fm^2 - hn^2}{kn^2 - gm^2}.$$

Ezen negyedik eset rávezet még egy ötödikre, a mely akkor áll be, ha $a + bx + cx^2$ oly két részre bontható, melyek közül az első teljes négyzet, a második pedig két tényezőnek szorzata; tehát $p^2 + qr$ alakú, a hol p, q, r ilyenforma kifejezések: $f + gx$. Ekkor ugyanis

$$\sqrt{p^2 + qr} = p + \frac{mq}{n}$$

$$p^2 + qr = p^2 + \frac{2mpq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}$$

$$r = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2q}{n^2}$$

$$n^2r = 2mnp + m^2q$$

s ez x-re nézve lineáris lévén, belőle x könnyen meghatározható.

Gyakran bajos fölismerni azt, hogy a trinom mily módon állítható elő p^2+qr alakban, s ezért kívánatos volna egy általánosan alkalmazható módszerre szert tennünk. Eleinte x helyébe kicsiny számokat helyettesítvén, próbálgatással törekszünk czélt érni. Ha találunk megfelelő értéket, akkor abból minden megoldást levezethetünk. Ugyanis

$$x=\frac{t}{u}$$

helyettesítéssel

$$a+\frac{bt}{u}+\frac{ct^2}{u^2}$$

áll elő, s ha ez teljes négyzet, akkor u^2-tel való szorzata

$$au^2+btu+ct^2$$

szintén teljes négyzet lesz. Most már keresnünk kell oly $t,\ u$ számokat, a melyekre nézve a föntebbi kifejezés teljes négyzetté válik.

Számtalan olyan trinom létezik, a mely semmiféle módon sem alakítható át teljes négyzetté. Nehogy ezekkel hiába vesződjünk, czélszerű lesz nehány ismertető jelet megállapítanunk, hogy fáradozásaink sikertelenségét már eleve fölismerhessük.

Mindenek előtt könnyen rájövünk arra, hogy a trinom középső tagját az

$$x=\frac{y-b}{2c}$$

helyettesítéssel eltávolíthatjuk. Ugyanis

$$\begin{aligned} a+\frac{by-b^2}{2c}+\frac{cy^2-2bcy+bc^2}{4c^2}&=\\ =\frac{4ac^2+2bcy-2bc^2+cy^2-2bcy+bc^2}{4c^2}&=\\ =\frac{4ac-b^2+y^2}{4c}&.\end{aligned}$$

Föltéve, hogy ez a kifejezés teljes négyzet, akkor

$$\frac{4ac-b^2+y^2}{4c}=\frac{z^2}{4}$$

tehető, honnét

$$4ac-b^2+y^2=cz^2$$
$$y^2=cz^2+b^2-4ac.$$

Ha

$$b^2-4ac=t,$$

akkor

$$cz^2+t$$

lesz a teljes négyzetté átalakítandó kifejezés, mely lényegesen egyszerűbb alakú, mint az eredetileg adott trinom.

$t=0$ esetében a kifejezés csak akkor teljes négyzet, ha c is az. Ez már oly ismertető jel, a mely igen gyakran alkalmazható.

Általános ismertető jelet nyerendő, tekintsünk egy d egész számot, s osszuk el ezzel az összes egész számokat. Könnyen belátható, hogy az összes egész számok

$$dn$$
$$dn+1,\ dn+2,\ dn+3,\ \dots$$
$$dn-1,\ dn-2,\ dn-3,\ \dots$$

alakban állíthatók elő.

$dn+k$ és $dn-k$ négyzeteinek az a közös tulajdonságuk, hogy d-vel való osztásuknál mindkettő a k^2 számot adja maradékul, a mit úgy fejezhetünk ki, hogy $(dn+k)^2$ és $(dn-k)^2$ a d-re mint osztóra nézve egyenlő maradékúak.

Ezen megjegyzés alapján számtalan

$$at^2+bu^2$$

alakú kifejezésre nézve kimutatható, hogy soha sem lehet teljes négyzetté. Pl. a 7-es szám esetében belátható, hogy

$$7t^2+3u^2,\ 7t^2+5u^2,\ 7t^2+6u^2$$

sohasem lehetnek teljes négyzetté; mert u-t 7-tel elosztván, a maradékok: $1,\ 2$ vagy 4. Már pedig az elsőnél a maradékok $3,\ 6$ vagy 5, a másodiknál $5,\ 3$ vagy 6, a harmadiknál pedig $6,\ 5$ vagy 3.

Dr. Bozóky Endre.