Euler algebrája két részből áll, melyek három, illetőleg két szakaszra oszlanak. Az első résznek első szakasza az "egyszerű mennyiségek"-ről tárgyal, értvén ez alatt az egytagúak algebráját, a második szakasz a polynomokkal, a harmadik az aránylatokkal foglalkozik. A második résznek első szakaszában az egyenletek elméletével, második szakaszában az ú. n. határozatlan analytikával ismerteti meg nemcsak a mathematikai íródiákságra betanított szabólegényt, hanem minket is, a kik e nagy szellem gondolatmenetével megismerkedni akarunk. A munka beható ismertetésére ezen lapok keretén belül alig vállalkozhatnék; de azt hiszem, érdemes munkát végzek azzal is, ha a fiatal olvasót egyes megjegyzésre méltó részletekkel megismertetvén, az eredetinek tanulmányozására serkentem. Eleve is meg kell azonban jegyeznem, hogy *Euler* munkájában sok oly részlet van, mely a mennyiségtudományok mai álláspontjáról ítélve, elavult felfogást tüntet föl, hiszen *Euler* óta, részben az ő úttörő munkálkodása nyomán a mennyiségtudományok birodalmában sok, mélyreható változás ment végbe.

Az első résznek első szakaszára nézve kevés a megjegyzendő. Tárgya: a hét alapművelet, mely igen érthető, áttekinthető modorban és mégis kellő következetességgel tárgyaltatik. A magasabbrendű hatványok rávezetik *Euler*-t a kitevő használatára, s megtaláljuk nála a negatív- és törtkitevők értelmezését is.

Érdekes az, a mit az imaginarius szám bevezetéséről olvasunk nála.

Euler szerint: "ha negatív számból kell négyzetgyököt vonni, akkor némileg zavarba jövünk; mert nincs oly megadható szám, melynek négyzete negatív". Minden pozitív szám nagyobb, minden negatív szám kisebb a zérusnál; a negatív számból vont négyzetgyök sem nem nagyobb, sem nem kisebb a zérusnál; de vele egyenlő sem lehet, mert 0-nak 0-sal való szorzata 0-t ad, ez pedig nem negatív szám. Ennélfogva a negatív számból vont négyzetgyököt *lehetetlen* számnak nevezi, ellentétben a többiekkel, a *lehetséges* számokkal. Az elnevezés megválasztása nem mondható szerencsésnek, s ellentmondásban áll azzal, hogy két lehetetlen számnak szorzata és hányadosa lehetséges szám. *Euler* erélyesen védekezik azon felfogás ellen, mintha a lehetetlen számoknak az algebrába való bevezetése haszontalan rögeszme lenne. Hivatkozik arra, hogy ha 12-t két oly részre kell bontani, melyeknek 40 a szorzatuk, az eredmény $6+\sqrt{-4}$ és $6-\sqrt{-4}$, a mi szerinte csupán azt jelenti, hogy a feladat megoldása *lehetetlen.*

Az első rész második szakasza a polynomokat tárgyalja. Ennek ismertetésénél is csak azokra szorítkozom, a mik az ismeretes anyagot érdekessé teszik. Így pl. a többtagúak osztásánál az

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\ldots\text{in inf.}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a}&=1-a+a^2-\ldots\text{in inf.}\\&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\ldots\text{in inf.}\end{aligned}$$

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\ldots\text{in inf.}$$

$$\frac{1}{1-a+a^2}=1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-\ldots\text{in inf.}$$

sorkifejtésekkel foglalkozik, rámutatván arra, hogy minden törtkifejezés ilyen sorkifejtéssel előállítható.

A kéttagúak magasabb hatványainak tárgyalásánál megtaláljuk nála a *Pascal*-féle háromszöget, megemlíti, hogy az n-dik hatvány együtthatóinak összege 2^n-nel egyenlő. Az együtthatók kiszámítására a *Pascal*-féle háromszög használatától függetlenül módszert ad, mely a következő. Ha pl. a 7. hatvány együtthatóit akarnók számítani, akkor írjuk föl a törtek következő sorát:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

Innét a 2. coefficiens $\frac{7}{1}$, a 3. coefficiens $\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}$ stb. Ezen eljárás igazolásánál a combinatorikára hivatkozik, s ennek segítségével felállítja a *binomiális tételt.*

Bár a tétel érvényességét tört és negatív kitevők esetére nem bizonyítja be, mégis felhasználja azt a gyökvonásnál, valamint tört kifejezések sorbafejtésénél.

Az első rész harmadik szakasza az arányokról és aránylatokról szól, s minden ezzel kapcsolatos dolgot felölel. A számtani arány és aránylat rávezet a számtani haladvány tárgyalására, majd pedig az *ábrás* (figurális) *számok* megismertetésére. A mértani arány és aránylattal kapcsolatban az egyszerű hármasszabállyal, az összetett hármasszabállyal és a lánczszabállyal végez. Majd rátér a geometriai haladványra, tárgyalja a szokásos tizedes törteket és a kamatszámítást.

*

Sokkal érdekesebb és tartalmasabb *Euler* algebrájának második része, mely az algebrai egyenletek megoldásával és a határozatlan analytikával foglalkozik.

Az elsőfokú egyenlet megoldását finom módszerességgel tárgyalja, s igen érdekes példákkal világosítja fel. A 2 és 3 ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer megfejtésénél az összehasonlítás módszerét alkalmazza, de a feladat mélyére nem hatol. Nagyobb gondot fordít a másodfokú egyenletre. Az $x^2 + px = q$ alakot nemcsak a teljes négyzetté való kiegészítéssel, hanem az $x = y + \frac{p}{2}$ helyettesítés alkalmazásával is megfejti. A discriminináns vizsgálatába nem bocsátkozik, hanem a tanultakat az ábrás számokból való négyzetgyökvonásra alkalmazza.

Inductive haladván, végül az n-szögű ábrás számra kerül a sor, mely az

$$\frac{(n-2)x^2 - n(n-4)x}{2} = a$$

egyenlet megoldását igényli.

Ezután levezeti a

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

kifejezést, melyet az $a^2 - b = c^2$ esetben több érdekes példában alkalmaz.

A vegyes másodfokú egyenlet természetének vizsgálata és polynomjának gyöktényezőkre való felbontása után *Euler* rátér a harmadfokú egyenletek tárgyalására. Itt először $x^3 = 8$ tiszta harmadfokú egyenlettel foglalkozik, s meghatározza mindhárom gyökét. Ugyanígy jár el az $x^3 = a$ alakú egyenlettel. Az általános alak megoldásánál a gondolatmenet a következő. Először is az $(x-p),\ (x-q),\ (x-r)$ gyöktényezők szorzásával

$$x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x - pqr = 0$$

alakú egyenletet állítja elő, melynél a gyököknek az együtthatókkal való összefüggése tűnik szembe.

Az absolut tagnak minden gyökkel oszthatónak kell lennie, s így módunkban áll az esetleges rationális gyököt megállapítani.

Ha x^3-nak együtthatója nem az egység, akkor új ismeretlennek bevezetésével módunkban áll ezen alakra visszatérni. Ezek után nehány érdekes példát nyújt oly egyenletekre nézve, melyeknek van rationális gyökük.

Az általános esetre áttérvén

$$x = a + b$$

köbre emeléséből

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

vagyis

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$$

származik. Az ilyen alakú egyenletnek egyik gyöke $x = a + b$.

Ezután $a^3 = p,\ b^3 = q$ helyettesítéssel az

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$$

egyenletalakhoz jutunk. Minthogy p és q mindig úgy határozhatók meg, hogy $\sqrt[3]{pq}$ és $p+q$ két tetszés szerinti adott számmal legyen egyenlő, ennélfogva minden harmadfokú egyenlet a fentebbi alakra hozható.

Tekintsük most az

$$x^3 = fx + g$$

egyenletet. Ennél tehát

$$3\sqrt[3]{pq} = f \text{ és } p + q = g$$

s ha ezekből p és q meghatároztatnak, akkor az egyenletnek egyik gyöke

$$x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}.$$

Ezáltal a 3-adfokú egyenlet megoldása vissza van vezetve p és q meghatározására. Könnyű átalakítások után

$$p = \frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}$$

$$q = \frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}$$

miket az utolsó egyenlőségbe helyettesítvén, *Cardanus* képlete áll elő.

Hogy *Cardanus* képlete a rationális gyököt esetleg nem adja meg, arra nézve példaként felhozza az $x^3 = 6x + 40$ egyenletet, melynek egyik gyöke 4, s a képlet szerint

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Végül kimutatja, hogy az

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet az $x + \dfrac{a}{3} = y$ helyettesítéssel oly alakra hozható, melyre a megadott eljárás közvetlenül alkalmazható, s ezzel a harmadfokú egyenlet megoldását befejezettnek nyilváníthatja.

A negyedfokú egyenlet tárgyalását az $x^4 = f$ és $x^4 + fx^2 + g = 0$ alakokon kezdi. Az általános alakra nézve megjegyzi, hogy az absolut tag ismét az egyenlet gyökeinek szorzatával egyenlő, s hogy az egyenlet többtagújában minden jelváltozásnak egy positív gyök, minden jelmaradásnak egy negatív gyök felel meg. Ezen megjegyzések segítségével megoldja az $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ egyenletet.

Majd rátér a negyedfokú reciprok egyenlet tárgyalására, melyet az $x^4 + mx^3 + nx^2 + mx + 1 = 0$ alakokon, s egy számpéldán végez el.

Az általános alak tárgyalását *Bombelli* módszerével végzi, mely abban áll, hogy az

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

egyenlet bal oldala az

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0$$

egyenlet bal oldalával azonosíttatván, p, q és r meghatározására az

$$\frac{a^2}{4} + 2p - q^2 = b$$

$$ap - 2qr = c$$

$$p^2 - r^2 = d$$

egyenletek nyeretnek, melyekből q és r kiküszöbölése után p-re nézve a

$$8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0$$

harmadfokú egyenlet származik, s így a negyedfokú egyenlet megoldása egy már elvégzett feladatra vezettetik vissza.

Bombelli módszerét nehány példán bemutatván, *Euler* a saját módszerét közli. Fölteszi, hogy a negyedfokú egyenletnek egyik gyöke

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

hol p, q és r gyökei a

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0$$

harmadfokú egyenletnek. Ennélfogva

$$p + q + r = f$$

$$pq + pr + qr = g$$

$$pqr = h.$$

Most állítsuk föl a kérdéses negyedfokú egyenletet. x kifejezését a négyzetre emelve

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$$

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Ezt ismét a négyzetre emelvén:

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}.$$

Újból helyettesítvén

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$$

$$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0.$$

Hátra van még annak kimutatása, hogy minden negyedfokú egyenlet ezen utóbbi alakra hozható, s akkor a feladat befejezettnek tekinthető. Az

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

alak a gyökök előjelcombinátióival 8 értékre vezet, ezek közül azonban csak 4 használható, mert

$$\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = \frac{1}{8}b$$

ha ez positív, akkor az egyenlet megoldásai:

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$$
$$\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$$

ha pedig $\frac{1}{8}b$ negatív, akkor a másik négy érték felel meg.

A szakaszt *Euler* az egyenletek közelítő megoldásával fejezi be. Ha pl. az $x^2 = a$ egyenletet kellene megoldani, és tudjuk, hogy

$$n < x < n + 1,$$

akkor $x = n + p$ tétetvén, p valódi tört lesz, és p^2 elhanyagolható kicsinységű. Így tehát

$$x^2 = n^2 + 2np = a,$$

honnét

$$p = \frac{a - n^2}{2n}.$$

Ha n az első megközelítő érték, akkor $\frac{n^2 + a}{2n}$ lesz egy második közelítő érték, mellyel az eljárás ismételhető. Ezen módszer magasabb rendű egyenletekre is alkalmazható.

Egy másik, szintén igen könnyen alkalmazható közelítő módszer a következő. A feladat abban áll, hogy meghatározzuk a számok oly határtalanul folytatható sorát

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots$$

melyben minden tag a megelőzővel osztatván, oly hányadost adjon, mely az egyenlet keresett gyökét annál jobban megközelítse, mennél hátrább állanak a számsorban az egymással elosztott tagok.

Föltéve, hogy ezen számsort a

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t, \ldots$$

tagokig már meghatároztuk, akkor $\frac{q}{p}$ már x-nek értékét meglehetősen megközelíti. Még inkább áll ez $\frac{r}{q}$-ra nézve. Szorzás által

$$x^2 = \frac{r}{p}.$$

Másrészt $\frac{s}{r}$ is közelítő érték, tehát

$$x^3 = \frac{s}{p} \text{ stb.}$$

A módszer könnyebben érthető, ha egy példában alkalmazását látjuk. Legyen adva $x^2 = x + 1$

$$x = \frac{q}{p},\ x^2 = \frac{r}{p}$$

s ezeket helyettesítvén

$$\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1,$$

honnét

$$q + p = r.$$

Ugyanígy

$$r + q = s$$
$$s + r = t \text{ stb.}$$

Ezek alkalmazásával a közelítő számsor

$$0,\ 1, 11,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89\ \ldots$$

és x-nek mindjobban közelítő értékei

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \ldots$$

A szíves olvasónak melegen ajánlom ezen közelítő módszereknek magasabbrendű egyenletek megoldására való alkalmazását.

Dr. Bozóky Endre.