(Folytatás.)

Legértékesebb és a mathematika történeti fejlődésében fontos szerepet játszó tanulmánya az, mely a *körmérésre* vonatkozik (de deminsione circuli). Mindenek előtt felállította azt a tételt, hogy a kör területe oly derékszögű háromszög területével egyenlő, melynek egyik befogója a kör sugara, másik befogója pedig a kör kerületével egyenlő.

Archimedes ezután a kör kerületét keresi meg; e végből a kör kerületét egy a kör köré és egy a körbe írt szabályos sokszög kerülete közé helyezi. Legelőször a kör köré írt szabályos hatszög oldalát határozza meg és az

$$r : \frac{a_6}{2} = \sqrt{3} : 1$$

aránylat helyett ezt a bővebben meg nem okolt egyenlőtlenséget állítja fel:

$$r : \frac{a_6}{2} > 265 : 153.$$

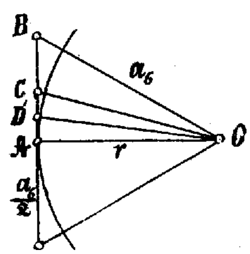
Ezt összekapcsolja ezzel az identikus aránylattal:

$$a_6 : \frac{a_6}{2} = 306 : 153$$

és ily módon a következő egyenlőtlenséget kapja:

(1) $$(r + a_6) : \frac{a_6}{2} > 571 : 153.$$

Ezek után áttér a kör köré írt szabályos tizenkétoldalú sokszög oldalára és ezt a következő elmés módon hozza be a számításba: kiindul ugyanis abból az általa már ismert tételből, hogy a háromszög szögfelezője a szemközt fekvő oldalt úgy metszi, hogy a metszetek úgy aránylanak egymáshoz, mint a metszetek mellett fekvő szomszédos oldalak.



Ennélfogva, ha OC az $AOB\angle$ felezője, akkor:

$$OB : OA = BC : CA;$$

ez aránylatban az utótagokat az előtagokhoz adja, úgy hogy:

$$(OB + OA) : OA = (BC + CA) : CA;$$

a megfelelő mennyiségeket behelyettesítve:

$$(a_6 + r) : r = \frac{a_6}{2} : \frac{a_{12}}{2}.$$

A beltagokat felcserélve, lesz:

$$(r + a_6) : \frac{a_6}{2} = r : \frac{a_{12}}{2}.$$

Az (1) egyenlőtlenség alapján most ez az egyenlőtlenség is fennáll:

(2) $$r : \frac{a_{12}}{2} > 571 : 153.$$

Ez egyenlőtlenség négyzetre emelve:

$$r^2 : \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2 > 571^2 : 153^2,$$

az előtagokhoz pedig az utótagok hozzáadva:

$$\left[r^2 + \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2;$$

mivel az r és az $\frac{a_{12}}{2}$ annak a derékszögű háromszögnek a befogói, a melynek átfogója OC, az egyenlőtlenség így is írható:

$$\overline{OC}^2 : \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2 > 349450 : 153^2,$$

az egyes tagokból pedig gyököt vonva, lesz:

$$OC : \frac{a_{12}}{2} > 591\frac{1}{8} : 153. \tag{3}$$

Ha az AOC szöget is megfelezzük, újra a következő egyenleteket nyerjük:

$$OC : OA = CD : DA$$

$$(OC + OA) : OA = (CD + DA) : DA$$

$$(OC + r) : r = \frac{a_{12}}{2} : \frac{a_{24}}{2}$$

$$(OC + r) : \frac{a_{12}}{2} = r : \frac{a_{24}}{2}. \tag{4}$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségből ezt az egyenlőtlenséget nyerjük:

$$(r + OC) : \frac{a_{12}}{2} > 1162\frac{1}{8} : 153;$$

ennélfogva a (4) egyenlet így alakul:

$$r : \frac{a_{24}}{2} > 1162\frac{1}{8} : 153.$$

Folytatólagos szögfelezésekkel Archimedes eljutott egészen a kör köré írt szabályos 96 oldalú sokszögig. Áttekinthetőség kedvéért még egyszer összeállítjuk az egyenlőtlenségeket, melyeket az egyes szabályos sokszögek oldalaira nézve nyert:

$$r : \frac{a_6}{2} > 265 : 153$$

$$r : \frac{a_{12}}{2} > 571 : 153$$

$$r : \frac{a_{24}}{2} > 1162\frac{1}{8} : 153.$$

Az a_{96}-ot tartalmazó egyenlőtlensége végre ez volt:

$$r : \frac{a_{96}}{2} > 4673\frac{1}{2} : 153.$$

Ha az a_{96}-nek a 192-szeresét vesszük, megkapjuk a 96 oldalú szabályos sokszög kerületét és az egyenlőtlenség ekkor ez:

$$r : K_{96} > 4673\frac{1}{2} : 29376.$$

Ha az egyenlőtlenséget megfordítjuk és a sugár helyett az átmérőt (d) vesszük, ezt kapjuk:

$$K_{96} : d < 14688 : 4673\frac{1}{2};$$

mivel:

$$14688 : 4673\frac{1}{2} < 3\frac{1}{7} : 1,$$

úgy még inkább:

$$K_{96} : d < 3\frac{1}{7} : 1.$$

Archimedes ezek után hasonló eljárás alapján rendre kiszámítja a körbe írt szabályos hat-, tizenkét-, huszonnégy-, negyvennyolcz- és kilenczvenhatszög oldalát és ez utóbbi sokszög kerületére (K'_{96}) nézve a következő egyenlőtlenséget kapja:

$$K'_{96} : d > 6336 : 2017\frac{1}{4}$$

vagy még inkább:

$$K'_{96} : d > 3\frac{10}{71} : 1.$$

Mivel a kör kerülete: K kisebb a körülírt, de nagyobb a beírt sokszög kerületénél, a kör kerületének arányát az átmérőjéhez a következő két határ közé szorítja:

$$3\frac{1}{7} > K : d > 3\frac{10}{71} : 1.$$

Látni való, hogy Archimedes Euklides követője, a mennyiben ő is az exhaustio módszerét alkalmmazza, még pedig ugyanoly mathematikai szigorúsággal, mint emez. Archimedes e műveletek révén tehát a mai nap általánosan π-vel jelölt számot helyezte e határok közé:

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

A mikor Arcdhimedes körmérését figyelemmel kísérjük, okvetetlenül feltűnik az a körülmény, hogy Archimedes igen sok megközelítő gyökvonást végzett. Tárgyalásának előbb közlött részeiben a következő egyenlőtlenségekkel ismerkedtünk meg:

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153} \quad \text{és} \quad \sqrt{349450} > 591\frac{1}{8},$$

a tárgyalás további folyamában azonban még e megközelítő mennyiségek is előfordulnak:

$$\sqrt{1373943\frac{33}{64}} > 1172\frac{1}{8} \quad \text{és} \quad \sqrt{5472132\frac{1}{16}} > 2339\frac{1}{4}.$$

Önkéntelenül felmerül a kérdés: vajjon miképpen kapta e számokat Archimedes? E kérdésre – sajnos – még a legapróbb részleteket is felkutató tudósok sem bírtak megfelelni; annyira a sötétben tapogatnak e téren, hogy még ama két hipotézis felállítása is merésznek látszik, melyek közül az egyik szerint Archimedes oly eljárást alkalmazott volna, a mely a mai nap a *láncztörteknek* nevezett alakzatok csíráját foglalta magában. E láncztörtek az idevágó esetekben ezek:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \dots}}}$$

és

$$\sqrt{a^2-b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \dots}}}$$

A láncztörteknek az a tulajdonságuk, hogy minél több elemét vesszük, annál inkább közelítik meg akár a véges, akár a végtelen láncztört által megadott számértéket, még pedig úgy, hogy e megközelítő értékek felváltva nagyobbak és kisebbek a szám igazi értékénél.

Hogy Archimedes ily fajta eljárást követett volna, a mellett az a körülmény szól, hogy már Euklides is az "Elemek" VII. könyvének 2. feladatában (K.M.L.VI. évf. 80. lap) két szám legnagyobb közös osztójának felkeresése alkalmával oly számoknak a sorozatát kapta, mely számok láncztörtek összeállítására alkalmasak. Viszont ellene szól e feltevésnek azt, hogy e láncztörtnek:

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \dots}}}$$

közelítő értékei rendre ezek: 2, $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$, $\frac{362}{209}$, …, de nincs meg köztük egyike sem annak a két határnak, melyek közé Archimedes a $\sqrt{3}$-at helyezte:

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

A másik hipotézis az, hogy Archimedes már nagyjában oly módon vonta a gyököt, mint a hogy mi tesszük azt mai napság. Emellett szól, hogy a görögök a számok négyzetre emelését is körülbelül oly módon tudták már végezni, mint mi és ez az eljárás elég könnyűvé tehette annak az útnak a megtalálását, mely a gyökvonásnak legalább megközelítő módszere felé vezetett.

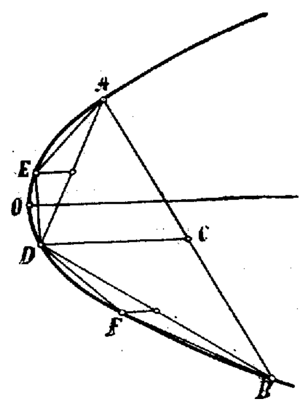
Archimedes különben is sokat foglalkozott numerikus számokkal, így pl. az *Αρχαί* (alapvonások) czímű munkájában a tízes számrendszert fejti ki, a melyben a $100000000 = 10^8$ egységet *oktád*-nak nevezi; a második oktád tehát 10^{16}-ig, a harmadik 10^{24}-ig terjed s. i. t. Végre összefoglal 100000000 ily oktádot újra egy egységbe, melyet *periodá*nak nevez és melynek értéke tehát: $(10^{10^8} = 10^{800000000}$, vagyis oly szám, mely 1 egyesből és 800000000 nullából áll.

E számrendszer képzésével áll összeköttetésben Archimedes ú. n. homokszámítása (*ψαμμίτης*, *arenarius*). Archimedes e feladatban azt számítja ki, hogy hány homokszemet foglal magában oly gömb, mely a világegyetemet bezárja.

Adatai ezek: 10000 homokszem együttvéve annyi, mint egy mákszem, egy mákszem átmérője negyedrésze egy ujj szélességének, a föld átmérője kisebb, mint 1000000 stádium (a stádium az akkori időben kb. 148 m volt) és a világegyetem átmérője kisebb, mint 10000 földátmérő. Ez adatok alapján kiszámítja, hogy a homokszemek száma több mint az 1. perioda 7. oktádja.

Hogy Archimedes mit akart e kissé játékszerűnek látszó feladattal, arról is igen eltérő vélemények vannak. Némelyek azt tartják, hogy Archimedes csak azt akarta megmutatni, hogy bizonyos határon túl nagy számokat is ügyes csoportosítással igen egyszerűen lehet kifejezni. Mások viszont mélyebb okot, bizonyos elvszerűséget látnak e kérdésben: a végtelen kicsinnyel szemben a végtelen nagy áll, a míg azonban a végtelen kicsinyt geometriailag is lehet tárgyalni, addig a végtelen nagyot csak számokkal lehet értelmezni; eme felfogás szerint tehát Archimedes nem akart egyebet, mint az Euklides által gyakran tárgyalt végtelen kicsiny fogalmához a végtelen nagy fogalmát hozzácsatolni és így az exhaustio elvét e két alapeleme által teljesen kifejteni.

Az exhaustio révén ismét visszatérhetünk azokra a geometriai kérdésekre, melyeket Archimedes éppen az exhaustio segélyével tárgyalt. Ilyen első sorban: a parabola quadraturája, vagyis területének kiszámítása. A mathematikai szigorúsággal és nagy tudományos apparátussal végzett számítás menetét csak kivonatosan ismertetjük a következőkben: vonjunk a parabola AB húrjának C felező pontjából (1. ábra) a parabola tengelyével párhuzamost, míg az a parabolát D pontban metszi.



Az AOB parabola szelet nagyobb, mint az ADB háromszög. Felezzük meg újra az AD és BD oldalakat és vonjunk e felező pontokon át is a tengellyel párhuzamos egyeneseket, míg azok a parabolát E és F pontokban metszik, akkor:

$$AOB \text{ parabolaszelet } > ADB\triangle + AED\triangle + DFB\triangle.$$

Archimedes ki tudta mutatni, hogy:

1. az $AED\triangle = DFB\triangle$ és 2. hogy e háromszögek mindegyike az ADB háromszögnek 8-adrésze, ennélfogva mind a kettő együttvéve annak negyedrésze, úgy, hogy:

$$AOB \text{ parabolaszelet } > \left(1+\frac{1}{4}\right)ADB\triangle.$$

Ha most az $AEDFB$ polygon minden oldalát újra felezzük, négy oly háromszöget kapunk, melyek együttvéve az ADB háromszögnek 16-od részét adják, úgy hogy:

$$AOB \text{ parabolaszelet } > \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)ADB\triangle.$$

Ha ezt az eljárást ily módon újra meg újra folytatjuk, kapjuk végre:

$$AOB \text{ parabola szelet} = \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)ADB\triangle.$$

Geometriai haladványok azonban nem okoztak Archimedesnek nagy nehézséget, hiszen erre a sorra:

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

összegképlete is van ily alakban:

$$S=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Mivel $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ a végtelen geometriai sorban minden számnál kisebb lesz, vagyis 0 felé halad, a sor összege mindinkább $\frac{4}{3}$ felé közeledik, úgy, hogy végre:

$$AOB \text{ parabola szelet } = \frac{4}{3}ADB\triangle.$$

E számításból azt látjuk, hogy Archimedes már behatóan ismerte a kúpszeletek tulajdonságait; valószínű, hogy nagyon sokat már Euklidesnek a kúpszeletekről szóló könyveiből ismert, de mindenesetre maga is kibővítette ezt az anyagot. A hyperbolával Archimedes nem foglalkozott, ellenben az ellipsis területét szintén kiszámította. A kúpszeletek neveit Archimedes még mindig úgy használta, mint ahogyan azokat Menaechmos megállapította (K.M.L.V.évf.150.lap), ámbár azt már tudta, hogy az ellipsis nemcsak a hegyesszögű, hanem mind a háromféle kúpon kapható alkalmas helyzetű metszés által.

Ugyancsak az exhaustio segélyével végezte Archimedes rendkívül érdekes számításait a nevéről elnevezett csigavonalról. E vonal keletkezését maga Archimedes így írta le: „Ha egy egyenes vonal egyik mozdulatlan végpontja körül a síkban egyenletes sebességgel forog és e közben a forgó egyenesen a forgási ponttól kiindulva egy pont ugyancsak egyenletes sebességgel halad, e pont a síkban csigavonalat ír le". A csigavonal definícziója tehát ez: oly vonal, melynek minden pontjához tartozó radius vectora arányos a körülfordulási szöggel, egyenlete pedig:

$$r = \chi\vartheta.$$

Archimedes igen behatóan ismerte e csigavonalat; tudta, hogy bármelyik czikkének területe mindig harmadrésze a hozzája tartozó kör területének; ezenkívül is még a görbének sok területi és érintési viszonyát ismerte.