I. Az eredeti értelmezés képlet-párja egyenletrendszernek tekinthető x_k, y_k-nak x_{k+1} és y_{k+1}-ből való meghatározására. $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ esetére

$$\left.\begin{aligned} 3x_k+2y_k&=x_{k+1}\\ 4x_k+3y_k&=y_{k+1}\end{aligned}\right\}\text{-ből} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_k&=3x_{k+1}-2y_{k+1}\\ y_k&=-4x_{k+1}+3y_{k+1}.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Miután ezt az új képlet-párt tekintjük a sorozat értelmezésének $k=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$-re, azért (2) minden egész k-ra érvényes.

Számítsuk ki (2) alapján $x_1=2$ és $y_1=3$-ból a 0 és -1 indexű tagokat: $x_0=3x_1-2y_1=0$, $y_0=-4x_1+3y_1=1$, ezekből pedig $x_{-1}=3x_0-2y_0=-2=-x_1$, és $y_{-1}=-4x_0+3y_0=3=y_1$. Eszerint az állítás $k=1$-re igaz.

Írjunk (2)-ben $k+1$ helyett $-j$-t, ekkor k helyére $-j-1=-(j+1)$ lép és nyerjük

$$x_{-(j+1)}=3x_{-j}-2y_{-j},\qquad y_{-(j+1)}=-4x_{-j}+3y_{-j}. \tag{3}$$

Ha már most $-j$ olyan (negatív) index, amelyre az állítás igaz, vagyis $x_{-j}=-x_j$ és $y_{-j}=y_j$, akkor ezekkel (3) és (1) alapján a $-(j+1)$ index is ilyen, mert

$$\begin{gathered} x_{-(j+1)}=-3x_j-2y_j=-(3x_j+2y_j)=-x_{j+1}.\\ y_{-(j+1)}=4x_j+3y_j=y_{j+1},\end{gathered}$$

vagyis az állítás érvényessége öröklődik $-(j+1)$-re tehát minden egész indexre érvényes.

II. (2)-ből, $3=y_{-1}$ és $2=-x_{-1}$ figyelembevételével és k helyére $k-1$-et írva bármely egész k mellett

$$x_{k-1}=x_{-1}y_k+y_{-1}x_k,\qquad y_{k-1}=y_{-1}y_k+2x_{-1}x_k, \tag{4}$$

eszerint a vizsgálandó

$$x_{k+r}=x_ry_k+y_rx_k,\qquad y_{k+r}=y_ry_k+2x_rx_k \tag{5}$$

összefüggés $r=-1$-gyel helyes. Ugyancsak helyes $r=0$-val is, tekintettel arra, hogy $x_0=0$, $y_0=1$. – Megmutatjuk r szerinti teljes indukcióval, hogy (5) minden egész r-re érvényes. Feltesszük evégett, hogy valamely $r=s$ értékre (5) helyes, vagyis

$$x_{k+s}=x_sy_k+y_sx_k,\qquad y_{k+s}=y_sy_k+2x_sx_k, \tag{6}$$

és megmutatjuk, hogy helyes r helyén $s-1$-gyel is. Valóban, (4)-et k helyén $k+s$-sel alkalmazva, majd (6)-ra tekintettel, végül átrendezés után ismét (4) alapján, ezúttal k-helyén s-sel, x_{k+s-1} és y_{k+s-1} egymás után így alakul:

$$\begin{aligned} x_{k+(s-1)}&=x_{(k+s)-1}=x_{-1}y_{k+s}+y_{-1}x_{k+s}=x_{-1}(y_sy_k+2x_sx_k)+y_{-1}(x_sy_k+y_sx_k)=\\ &=(x_{-1}y_s+y_{-1}x_s)y_k+(y_{-1}y_s+2x_{-1}x_s)x_k=x_{s-1}y_k+y_{s-1}x_k,\\ y_{k+(s-1)}&=y_{(k+s)-1}=y_{-1}y_{k+s}+2x_{-1}x_{k+s}=y_{-1}(y_sy_k+2x_sx_k)+2x_{-1}(x_sy_k+y_sx_k)=\\ &=(y_{-1}y_s+2x_{-1}x_s)y_k+2(x_{-1}y_s+y_{-1}x_s)x_k=\\ &=y_{s-1}y_k+2x_{s-1}x_k.\end{aligned}$$

Ezek szerint (5) bármely egész k-val és bármely egész r-rel érvényes.

Kovács Imre (Békés, Szegedi Kis I. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A II. részbeli bizonyítás helyett elég lett volna arra rámutatni, hogy a (2) képletpár egyenértékű (1)-gyel; ennélfogva – bár a sorozatpár visszafelé való folytatását (2)-vel értelmeztük, – a folytatásokban (1) is érvényes. (Pl. $x_{-3}=-70$ és $y_{-3}=99$-ből (1) alapján $x_{-2}=-210+198=-12$ és $y_{-2}=-280+297=17$.) Eszerint (1) is minden egész indexre érvényes; és ez áll minden belőle levezetett összefüggésre, – így (5)-re is.