I. megoldás. (1) és (2) az $u = x^2 + y^2$ és $v = xy$ új ismeretlenekre nézve elsőfokú egyenletrendszer:

$$3u - v = 16, \qquad 7u - 4v = 38.$$

Innen $u = 5{,}2$, $v = -0{,}4$. – Ezekből kiszámíthatjuk $w = x + y$ értékét: $u + 2v = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = w^2 = 4{,}4$, tehát $w = \pm\sqrt{4{,}4}$. – Most már x és y értékét a

$$z^2 - wz + v = 0$$

egyenlet gyökei adják:

$$z = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2 - 4v}) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{4{,}4} \pm \sqrt{6}) = \pm\sqrt{1{,}1}\ \pm \sqrt{1{,}5},$$

ahol a két négyzetgyök előtt $\pm$ előjel-pár egymástól független. Az előjelek minden párosításával 4 megoldást kapunk:

$$x_1 = +\sqrt{1{,}1} + \sqrt{1{,}5}, \qquad x_2 = +\sqrt{1{,}1} - \sqrt{1{,}5},$$
$$x_3 = -\sqrt{1{,}1} + \sqrt{1{,}5}, \qquad x_4 = -\sqrt{1{,}1} - \sqrt{1{,}5}$$

és így $y = w - x$ alapján – itt már azonban w-nek az x-ben használt előjelével! –

$$y_1 = +\sqrt{1{,}1} - \sqrt{1{,}5} = x_2,\ y_2 = x_1,\ y_3 = x_4,\ y_4 = x_3.$$

Négy értékes jegyre a négyzetgyöktáblázat alapján $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}049$ és $\sqrt{1{,}5} \approx \approx 1{,}225$, ezért legfeljebb 0,001 hibával

$$x_1 = y_2 \approx 2{,}274, \qquad y_1 = x_2 \approx -0{,}176$$
$$x_3 = y_4 \approx 0{,}176, \qquad y_3 = x_4 \approx -2{,}274.$$

Kiss Sándor (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás alapján kereshetjük mindjárt azt a λ, μ számpárt, amellyel (1) λ-szorosának és (2) μ-szörösének összege egyenlő $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$-nel, más szóval: amellyel az összegben $x^2 + y^2$ együtthatója 1, és xy együtthatója 2, vagyis

$$3\lambda + 7\mu = 1 \qquad -\lambda - 4\mu = 2.$$

Innen $\lambda = 3{,}6$, $\mu = -1{,}4$. Ekkor $(x + y)^2 = 16\lambda + 38\mu = 4{,}4$, tehát ismét $x + y = \pm 2\sqrt{1{,}1}$. – Hasonlóan kapunk egyenletet $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$-ra, és ebből $x - y$-ra, azzal a ν, ξ számpárral, melyre

$$3\nu + 7\xi = 1 \qquad -\nu - 4\xi = -2.$$

Innen $\nu = -2$, $\xi = 1$, ekkor $(x - y)^2 = 16\nu + 38\xi = 6$, tehát $x - y = \pm\sqrt{6} = = \pm 2\sqrt{1{,}5}$.

Most már x és y-ra a $2\cdot 2$ előjelváltozatnak megfelelően írhatunk fel 4 elsőfokú egyenletrendszert, pl. $x+y = +2\sqrt{1{,}1}$, $x - y = +2\sqrt{1{,}5}$-ből a fenti x_1, y_1 megoldás adódik.

Kucza János (Jászberény, Lehel Vezér g. III. o. t.)

III. megoldás. Grafikus megoldás céljára megvizsgáljuk, hogy milyen görbe lesz az (1) és (2) képe.

Mindkét egyenletben x és y-t felcserélve ismét az eredeti egyenlethez jutunk. Eszerint ha egy $P(x_0,\, y_0)$ pont rajta van a görbén, akkor $P'(y_0,\, x_0)$ is rajta van, vagyis a görbe a koordinátatengelyek I. és III. negyedbeli f_1 szögfelezőjére tengelyesen tükrös. Hasonlóan a tengelyek II. és IV. negyedbeli f_2 szögfelezője is tükrös tengelye mindkét görbének, mert x helyett $-y$-t és y helyett $-x$-et írva is önmagába megy át mindkét egyenlet, tehát P-vel együtt f_2-re való $P''(-y_0,\, -x_0)$ tükörképe is a görbén van.

Tekintsük ezért a görbéket abban a koordinátarendszerben, melynek tengelyei f_1 és f_2. Az új koordinátákat x', y'-vel jelölve x, y helyére

(3) $$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

lép (lásd a gimn. III. o. tankönyv „Hiperbola más helyzetben" c. pontját, de x és x', valamint y és y' cseréjével), és az új egyenletek

(1) $$2{,}5x'^2 + 3{,}5y'^2 = 16,$$

(2′) $$5x'^2 + 9y'^2 = 38.$$

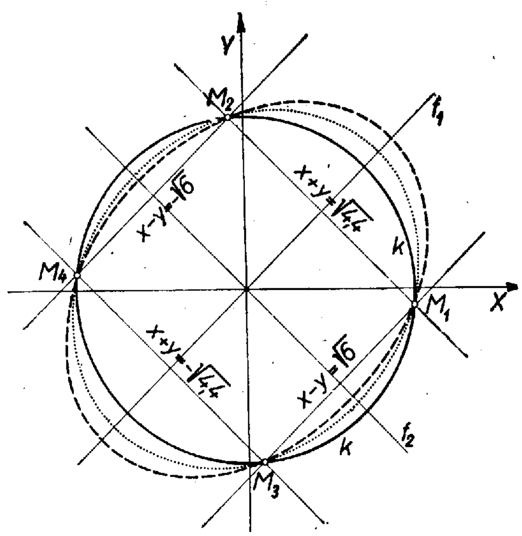
Eszerint mindkét görbe ellipszis a következő féltengelyekkel:

$$a_1 = \sqrt{\frac{16}{2{,}5}} \approx 2{,}53, \quad b_1 = \sqrt{\frac{16}{3{,}5}} \approx 2{,}14; \quad a_2 = \sqrt{\frac{38}{5}} \approx 2{,}76, \quad b_2 = \sqrt{\frac{38}{9}} \approx 2{,}05.$$

Látjuk,hogy $a_2 > a_1$ és $b_2 < b_1$, tehát a második ellipszis nagytengelyének végpontjai az első ellipszisen kívül vannak, kistengelyének végpontjai viszont annak belsejében, ezért a két ellipszis 4 pontban metszi egymást. Ezeket tudva már az eredeti rendszerben is ábrázolhatjuk (1) és (2)-t az

$$y = \frac{1}{6}(x \pm \sqrt{192 - 35x^2}) \qquad y = \frac{1}{7}(2x \pm \sqrt{266 - 45x^2})$$

kifejezések alapján is, – ugyanis az $(1')$, $(2')$ alapján való ábrázolás után a leolvasott x', y' megoldásokból x, y-t ismét számítanunk kellene (3) alapján.



A metszéspontok 1 tizedes pontossággal

$$M_1(2{,}3;\ -0{,}2),\quad M_2(-0{,}2;\ 2{,}3),\quad M_3(0{,}2;\ -2{,}3) \text{ és } M_4(-2{,}3;\ 0{,}2).$$

Bodó Zoltán (Eger, Dobó I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2)-t ábrázoló görbék metszéspontjait úgy is megkaphatjuk, mint az egyenletrendszer átalakításával kapott újabb egyenleteket ábrázoló görbék metszéspontjait. Az ellipsziseknél sokkal könnyebben megrajzolható az I. megoldásbeli $x^2 + y^2 = 5{,}2$ kör és az $x + y = \pm\sqrt{4{,}4}$ egyenespár (felhasználva Pythagorász tételét és hogy

$$5{,}2 = 2{,}2^2 + 0{,}6^2 = 1{,}8^2 + 1{,}4^2, \text{ ill. } 4{,}4 = 2^2 + 0{,}6^2 + 0{,}2^2 = 1{,}8^2 + 1^2 + 0{,}4^2),$$

továbbá a II. megoldásbeli $x - y = \pm\sqrt{6}$ egyenespár $(6 = 2^2 + 1^2 + 1^2)$. A 4 metszéspontot vagy a kör és az egyik egyenespár adhatja, vagy pedig a két egyenespár.

Nagy Péter (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

2. A számító megoldást előkészíthetjük az $y/x = q$ hányados kiszámításával is, ha (1) és (2)-ből előbb az állandó tagokat küszöböljük ki. (1) és (2)-t 19-cel, ill. -8-cal szorozva és összeadva $x^2 + 13xy + y^2 = 0$, és innen $q = -6{,}5 \pm$ $\pm\sqrt{41{,}25}$. Most már pl. $y = qx$ helyettesítéssel (1)-ből $(3 - q + 3q^2)x^2 = 16$, és átalakításokkal $x = \pm\sqrt{2{,}6 \pm \sqrt{6{,}6}}$. – Ennek grafikus megfelelője az, hogy egyik görbe gyanánt az $y = q_1x$, $y = q_2x$ egyenespárt vesszük. (E két egyenes metszése, az origó, természetesen nem megoldása az (1), (2) rendszernek hiszen ez az egyenespár csak a rendszer egyik másodfokú egyenletét helyettesíti.)

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)